Matemáticas I. Examen extraordinario. Septiembre de 2018

1. Halla el dominio y los cortes con los ejes de las siguientes funciones:
a) $\mathbf{f(x) = 1 + 2sen\ 3x}$

Dominio: $\mathbb{R}$;

corte con OY: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 1 + 2 \cdot \text{sen } 0 = 1$; cortes con OX: $y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + 2\text{sen } 3x = 0 \Rightarrow \text{sen } 3x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \begin{cases} 210° + k360° \Rightarrow x = 70° + k120° \\ 330° + k360° \Rightarrow x = 110° + k120° \end{cases}$$

b) $\mathbf{g(x) = ln(4 - x^2)}$

Dominio$= \{x\epsilon\mathbb{R}: 4 - x^2 > 0\}$

Para resolver la inecuación hallamos primero las soluciones de la ecuación $4 - x^2 = 0$, que son ± 2, y, mirando el signo de $4 - x^2$ en los tres intervalos$(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$, vemos que $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Por tanto, el dominio es $(-2, 2)$

Corte con OY: $x = 0 \Rightarrow y = g(0) = \ln 4$;

Cortes con OX: $y = 0 \Rightarrow \ln(4 - x^2) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

2. Estudia el crecimiento y la curvatura (incluyendo posibles extremos relativos e inflexiones) de la función $\mathbf{f(x) = x^3 - 9x^2}$

$f'(x) = 3x^2 - 18x$; $f''(x) = 6x - 18$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 6$; $f''(0) < 0 \Rightarrow$máximo en $x = 0$; $f''(6) > 0 \Rightarrow$mínimo en $x = 6$.
Por tanto, crece en $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$ y decrece en (0, 6)

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 3 \Leftrightarrow$f es convexa. Por tanto, tiene una inflexión en $x = 3$ y es cóncava en $(3, \infty)$.

3. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} e^{2x} & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} & si\ x > 0 \end{cases}}$$

La función es continua y derivable en todo su dominio salvo quizá en $x = 0$, donde tenemos que estudiar si lo es o no.

Continuidad:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{2x} = e^0 = 1; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$$

Por tanto, es continua.

Derivabilidad:

$(e^{2x})' = 2e^{2x} \Rightarrow f'_-(0) = 2e^0 = 2;$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)' = \left((x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\ (x+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{(x+1)^3}} \Rightarrow f'_+(0) = -\frac{1}{2} \neq 2$$

Por tanto, no es derivable en $x = 0$

4. Halla las asíntotas de la función

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x^2 + 2x}}{\mathbf{x^2 - 4}} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y no tiene asíntotas oblicuas, ya que

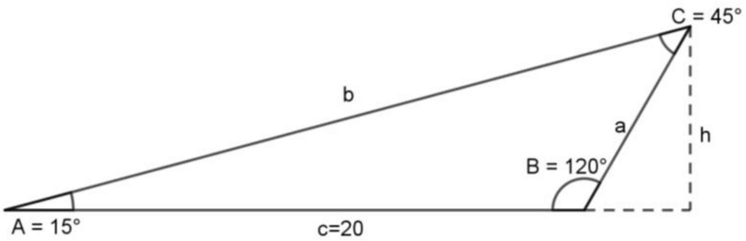
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

Para estudiar si tiene asíntotas verticales, calculamos los límites en los valores que anulan el denominador:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{8}{0} = \pm\infty; \quad \lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -2} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, hay asíntota vertical en $x = 2$ pero no en $x = -2$, donde hay una discontinuidad evitable.

5. Calcula el área y el perímetro de la figura de la de la imagen



Para el perímetro necesitamos calcular los lados a y b;
Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen}(45° - 30°) =$$

$$= \operatorname{sen} 45° \cos 30° - \cos 45° \operatorname{sen} 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Por el teorema de los senos:

$$\frac{20}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{a}{\operatorname{sen} 15°} \Rightarrow a = \frac{20 \operatorname{sen} 15°}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{5\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

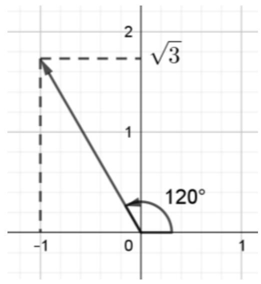
$$\frac{20}{\text{sen } 45°} = \frac{b}{\text{sen } 120°} \Rightarrow b = \frac{20 \text{ sen } 120°}{\text{sen } 45°} = \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{6}$$

Con lo cual, el perímetro será $20 + 10\left(\sqrt{3} - 1\right) + 10\sqrt{6} = 10(1 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$

Por otro lado, para el área necesitamos la altura h. Si llamamos S al área del triángulo,

$$h = b \text{ sen } 15° = \frac{10\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = 15 + 5\sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{1}{2}20\left(15 + 5\sqrt{3}\right) = 150 + 50\sqrt{3}$$

6. Sea $\mathbf{z = -1 + \sqrt{-3}}$. Represéntalo, exprésalo en forma polar y halla $\mathbf{z^8}$



$$z = -1 + \sqrt{-3} = -1 + \sqrt{3}\,i$$

$$|z| = \sqrt{1 + 3} = 2; \arg(z) = \text{arc tg}\left(-\sqrt{3}\right) = 120° \Rightarrow z = 2_{120°}$$

$$z^8 = (2_{120°})^8 = (2^8)_{8 \cdot 120°} = 64_{960°} = 64_{240°}$$

7. Dada la recta $\mathbf{r \equiv x + 3y - 1 = 0}$ y el punto $\mathbf{P(-2, 0)}$, se pide:
a) Distancia.

$$d(P, r) = \frac{|-2 + 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

b) coseno del ángulo que forma r con el eje OX

$$x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 - x}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

La pendiente de la recta es tangente del ángulo buscado, por tanto hay que obtener el coseno conociendo la pendiente:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \xRightarrow{:\cos^2\alpha} 1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{10} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

c) Ecuaciones paramétricas de la recta s perpendicular a r por P

$$\vec{n}_r = (1,3) = \vec{d}_s \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3t \end{cases}$$

d) Proyección de P sobre r (Q)

$Q = r \wedge s$; sustituyendo las paramétricas de s en r, se tiene:

$$-2 + t + 3 \cdot 3t = 1 \Rightarrow t = \frac{3}{10} \Rightarrow Q = \left(-\frac{17}{10}, \frac{9}{10}\right)$$

e) Simétrico de P respecto a r (P')

Como Q es el punto medio de P y P'=(a,b), se tiene:

$$\left(-\frac{17}{10},\frac{9}{10}\right)=\left(\frac{-2+a}{2},\frac{b}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{17}{10}=\dfrac{-2+a}{2}\Rightarrow a=-\dfrac{7}{5}\\ \dfrac{9}{10}=\dfrac{b}{2}\Rightarrow b=\dfrac{9}{5}\end{cases}$$