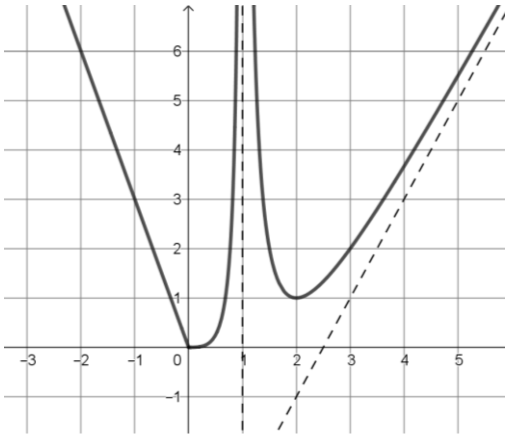
Matemáticas I. Examen de recuperación de la 2ª evaluación.

1. (2 puntos) A la vista de la gráfica de $y = f(x)$ contesta a las siguientes cuestiones:



a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f:

Tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$; en el resto del dominio es continua.
Además de en $x = 1$, f no es derivable en $x = 0$ (punto anguloso)

b) $\mathbf{f'(2)} = 0$ (tangente horizontal); $\mathbf{f'(-1)} = -3$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 2$ (pendiente de la asíntota)

d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\infty$

e) $\mathbf{f'(x) < 0} \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1,2)$

2. (1,5 puntos) Estudia la continuidad de las funciones:

$$\mathbf{a)}\ \mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x^3 + x}};\quad \nexists f(0);\ \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2+1} = 2 \Rightarrow$$

⇒f tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$ **(0,5 puntos)**

$$\mathbf{b)}\ \mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{arc\ tg\ x} & \mathbf{si\ x \geq 0} \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \text{arc tg } x = \text{arc tg } 0 = 0;$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, ya que

$$-1 \leq \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \Rightarrow 0 = \lim_{x\to 0^-}(-x) \leq \lim_{x\to 0^-} x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

Por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}$

3. (1x2 puntos) Encuentra todas las asíntotas de las funciones:

$$\mathbf{a)}\ \mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{x-3}} = x + 3 + \frac{9}{x-3} \approx x + 3 \text{ cuando } x \to \pm\infty \Rightarrow$$

⇒Tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = x - 3$ y otra vertical en $x = 3$, ya que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$

$$\mathbf{b)}\ \mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1 + e^{-x}}}$$

No tiene asíntotas verticales, ya que $1 + e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, pero sí horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{1+0} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ es asíntota horizontal por la derecha;}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{2}{1+\infty} = 0 \Rightarrow\ y = 0 \text{ es asíntota horizontal por la izquierda}$$

Al tener por los dos lados asíntotas horizontales no tiene asíntotas oblicuas.

4. (1,5 puntos) Estudia el crecimiento y la curvatura de la función $\mathbf{f(x) = x \cdot e^{x-3}}$

$f'(x) = (x+1) \cdot e^{x-3}$; $\quad f''(x) = (x+2) \cdot e^{x-3}$; $\quad f'''(x) = (x+3) \cdot e^{x-3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1; f''(-1) > 0 \Rightarrow$ mínimo en $x = -1 \Rightarrow$decrece en $(-\infty, -1)$, crece en $(1, \infty)$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (x+2) \cdot e^{x-3} = 0 \Rightarrow x = -2; f'''(-2) \neq 0 \Rightarrow$inflexión en $x = -2$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$; por tanto f es convexa en $(-\infty, -2)$ y cóncava en $(-2, \infty)$

5. (1 punto) Halla la velocidad media y la velocidad instantánea en $\mathbf{t = 3}$ de un móvil de ecuación espacio-tiempo dada por la fórmula

$$\mathbf{s(t) = \sqrt{t+1} \quad 0 \leq t \leq 8}$$

Velocidad media:

$$\frac{s(8) - s(0)}{8 - 0} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Velocidad instantánea en $t = 3$: $s'(3)$

$$s'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow s'(s) = \frac{1}{4}$$

6. (1,5 puntos) Un globo esférico cuyo volumen inicial es de 40 litros se conecta durante 30 segundos a una bomba que le inyecta un litro de aire cada dos segundos. Encuentra la expresión algebraica de la función que expresa el radio del globo a medida que pasa el tiempo y esboza su gráfica.

Volumen al cabo de x segundos:

$$40 + \frac{x}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{240 + 3x}{8\pi} \Rightarrow r = f(x) = \sqrt[3]{\frac{240 + 3x}{8\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{8\pi}}\sqrt[3]{x + 80}$$

Su gráfica es por tanto la de $y = x^3$, desplazada 80 unidades a la izquierda y deformada: