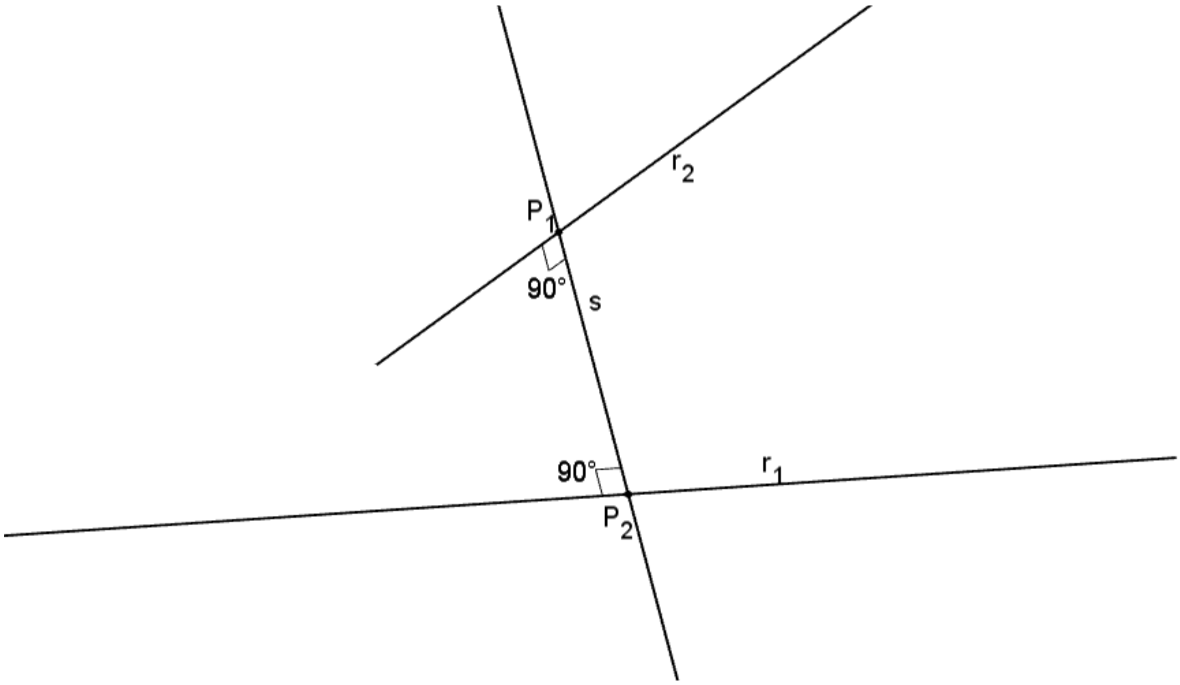
Sólo buscando las palabras se encuentran los pensamientos.
Joseph Joubert. Ensayista francés (1754-1824).

Matemáticas II. Geometría analítica. Examen de recuperación. 11.01.2019

1. Sean r_1 y r_2 dos rectas no coplanarias. Explica cómo encontrar otra recta s que corte a ambas perpendicularmente.

Sean $P_1 = r_1 \wedge s$, $P_2 = r_2 \wedge s$ (ambos desconocidos), d_1 y d_2 los dos vectores directores de r_1 y r_2.



Expresando ambas rectas en forma paramétrica, obtendremos una expresión de P_1 en función de un parámetro λ_1 y P_2 en función de otro parámetro λ_2. El vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ es perpendicular tanto a $r_1$como a r_2, por lo que $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot d_1 = 0$, $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot d_2 = 0$. Tenemos así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (λ_1 y λ_2). Resolviéndolo obtenemos λ_1 y λ_2 y con ello, P_1 y P_2. La recta s es la que pasa por estos dos puntos.

Otra forma:

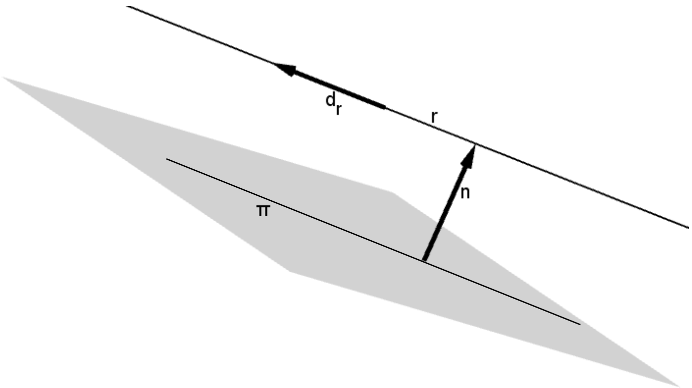
Al ser s perpendicular a r_1 y a r_2, un vector director suyo es $d_1 \times d_2 = d_s$. r_1 y s son coplanarias; el plano que las contiene, π_1 , tendrá por vectores directores a d_1 y a d_s y pasará por cualquier punto de r_1, por lo que podemos obtener su ecuación. Análogamente la del plano π_2 que contiene a r_2 y a s. s es la intersección de los dos planos hallados.

Otra forma más:

Expresamos P_1 en función de un parámetro λ_1. Para que la recta que pase por P_1 y tenga por vector director a $d_1 \times d_2$ sea coplanaria con r_2, ha de ser nulo el determinante formado por $d_2, d_1 \times d_2$ y $\overrightarrow{P_1A}$, siendo A cualquier punto de r_2. Igualando pues a 0 el determinante (que depende de λ_1) tendremos una ecuación con una incógnita, λ_1. Resolviendo la ecuación obtenemos P_1, y con ese punto y el vector $d_1 \times d_2$ tenemos s.

2. Sea el punto $A(2,0,-1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y + mz = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 6$. Se pide:

a) Hallar $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ para que r y π no sean secantes y determinar, para el valor hallado, si son paralelos o bien $\mathbf{r} \subset \boldsymbol{\pi}$.



El vector director de r es

$d_r = (1,-1,0) \times (0,1,m) = (-m,-m,1)$.

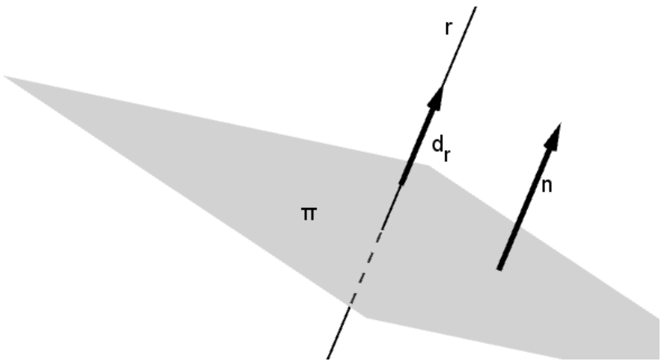
El vector normal al plano, $n = (1,1,2)$.

$r \parallel \pi$ ó $r \subset \pi \Leftrightarrow d_r \perp n \Leftrightarrow d_r \cdot n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -m - m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

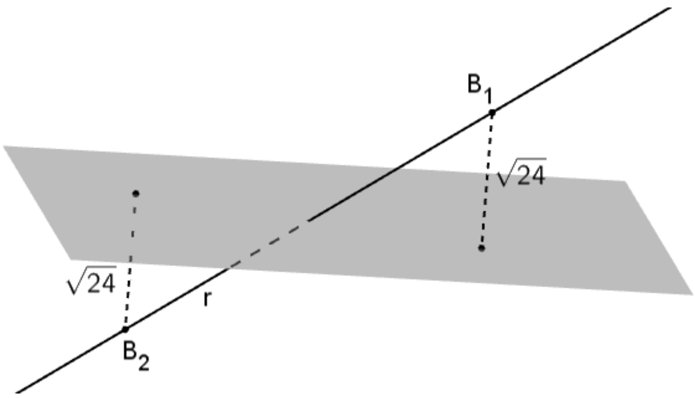
(para este valor son paralelos en sentido estricto ya que el punto (0,0,1) de r no está en π)

b) Hallar $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ para que r y π sean perpendiculares.



$$r \perp \pi \Leftrightarrow d_r \parallel n \Leftrightarrow \frac{-m}{1} = \frac{-m}{1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

c) Para $\mathbf{m} = 3$, encontrar todos los puntos de r que disten $\sqrt{24}$ unidades de π.



En este caso recta y plano son secantes pero no perpendiculares, por lo que habrá dos soluciones.
Expresamos r en paramétricas, para lo cual hacemos por ejemplo $z = t \Rightarrow y = 1 - 3t = x$

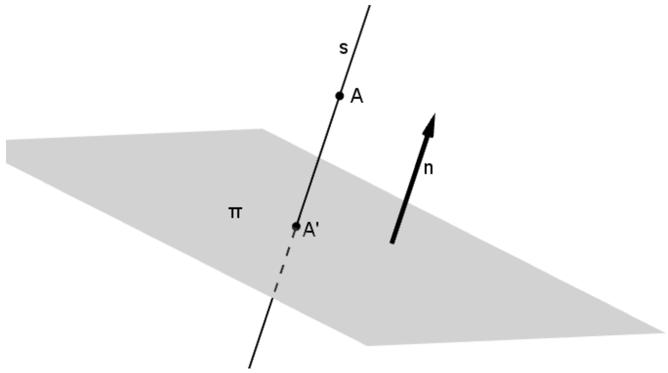
Con lo cual $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$

Si llamamos B al punto buscado, será por tanto de la forma $B = (1 - 3t, 1 - 3t, t)$;

$$d(B,r) = \sqrt{24} \Rightarrow \frac{|1 - 3t + 1 - 3t + 2t - 6|}{\sqrt{1+1+4}} = 2\sqrt{6} \Rightarrow |-4t - 4| = 12 \Rightarrow 4t + 4 = \pm 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t + 1 = \pm 3 \Rightarrow t = -1 \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow B_1 = (-5,-5,2) \\ t = -4 \Rightarrow B_2 = (13,13,-4) \end{cases}$$

d) Halla razonadamente la proyección ortogonal de A sobre π



Hallamos la ecuación de la recta s perpendicular a π por A, que tendrá a n por vector director:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad A' = s \wedge \pi\text{; para hallarlo}$$

sustituimos las paramétricas de r en la ecuación de π:

$$2 + \lambda + \lambda + 2(-1 + 2\lambda) = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow A' = (3,1,1)$$

3. Estudia la posición relativa de los tres planos según los valores de a ∈ $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{\pi_1 \equiv ax - y - z = 0}$$
$$\boldsymbol{\pi_2 \equiv x + y - az = 2}$$
$$\boldsymbol{\pi_3 \equiv x - ay + z = 0}$$

Sea M la matriz de coeficientes y $\overline{M}$ la ampliada.

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix} = 3a + 2 - a^3 = (2-a)(a+1)^2;\ |M| = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ó } a = 2$$

Por tanto, si $a \notin \{-1,\ 2\} \Rightarrow$ rg M$= 3 \Rightarrow$ rg $\overline{M}$ =3 y el sistema de ecuaciones es compatible determinado. Eso quiere decir que los tres planos tienen un punto común (posición general).

$$\text{Si } a = -1 \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv -x - y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y + z = 2 \\ \pi_3 \equiv x + y + z = 0 \end{cases}$$; claramente son $\pi_1 = \pi_3$ y ambos paralelos a π_2

$$\text{Si } a = 2 \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y - 2z = 2 \\ \pi_3 \equiv x - 2y + z = 0 \end{cases}$$; no hay paralelismos ni coincidencias; estudiamos los rangos:

$$\text{rg}\,\overline{M} = \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_{2,3} \sim 2F_{2,3} - F_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 \sim F_3 + F_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3$$

pues el menor encuadrado tiene determinante$\neq 0$; sin embargo, rg M$= 2$ (por tener una fila nula), por lo que el sistema es incompatible y por tanto los planos no tienen ningún punto en común: están en “tienda de campaña”, es decir, se cortan dos a dos en tres rectas paralelas entre sí: