Matemáticas I. Examen de recuperación de la 1ª evaluación.

1. (2,5 puntos) Una de las siguientes sucesiones es convergente y otra tiende a ∞:

$$\mathbf{a_n = \frac{1-n^2}{n+3}} \qquad \mathbf{b_n = (-1)^n \frac{2n}{n+3}} \qquad \mathbf{c_n = \frac{3n}{n+3}} \qquad \mathbf{d_n = \frac{3n+1}{5}}$$

a) Identifícalas. La convergente es c_n (tiende a 3) y la que tiende a ∞ es d_n.

b) Encuentra a partir de qué término, todos los siguientes de la convergente distan de su límite menos de una centésima.

$$|c_n - 3| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{3n}{n+3} - 3\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{3n-3n-9}{n+3}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{-9}{n+3}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{n+3} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{n+3}{9} > 100 \Leftrightarrow n > 897$$

Por tanto, a partir de c_{898} los términos de la sucesión están a menos de una centésima de su límite, que es 3.

c) Estudia la monotonía de $\mathbf{a_n}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)^2}{n+1+3} - \frac{1-n^2}{n+3} = \frac{-n^2-2n}{n+4} - \frac{1-n^2}{n+3} = \frac{(-n^2-2n)(n+3)-(1-n^2)(n+3)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{-n^3-3n^2-2n^2-6n-n-3+n^3+3n^2}{(n+4)(n+3)} = \frac{-2n^2-7n-3}{(n+4)(n+3)} < 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo que quiere decir que es decreciente.

2. (3 puntos) Estudia la continuidad y halla todas las asíntotas de las siguientes funciones:

$$\mathbf{a)}\ \mathbf{f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - x}} = \frac{2x^2}{x(x-1)}$$

Tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$ ya que $\nexists f(0)$ pero

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x-1} = 0$$

Además tiene una asíntota vertical (y por tanto una discontinuidad de salto infinito) en $x = 1$, pues

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2}{x^2-x} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

También tiene una asíntota horizontal en $y = 2$ ya que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2}{x^2-x} = 2$$

$$\mathbf{b)}\ \mathbf{g(x) = \frac{3x^3}{x^2+4}} = 3x - \frac{12x}{x^2+4}$$

Es continua (y por tanto no tiene asíntotas verticales), ya que $x^2 + 4 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; tiene una asíntota oblícua, la recta $y = 3x$, ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x}{x^2+4} = 0 \Rightarrow g(x) \cong 3x \quad \text{cuando } x \to \infty$$

3. (3 puntos) Estudia y representa la función $\mathbf{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11}$ indicando claramente las coordenadas de sus puntos críticos (extremos relativos e inflexiones), así como sus puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Corte con OY: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 11 \Rightarrow (0, 11)$

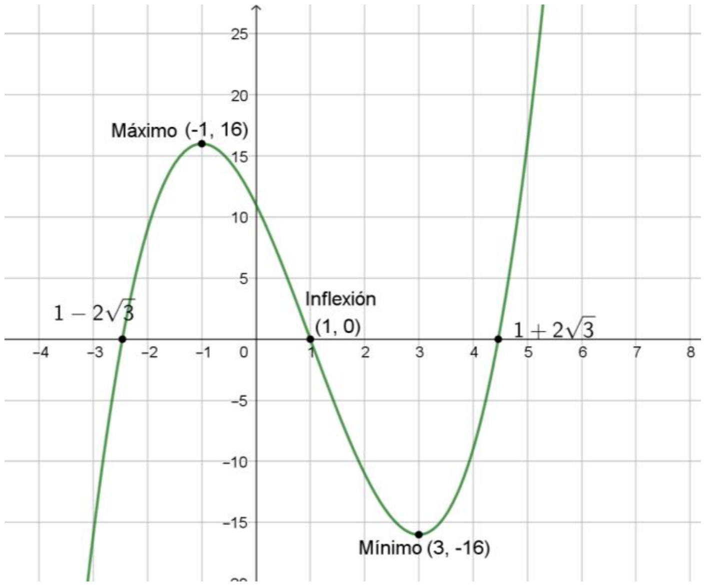
Cortes con OX: $y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \xRightarrow{\text{Ruffini}} (x-1)(x^2 - 2x - 11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1,0), \left(1 + 2\sqrt{3}, 0\right), (1 - 2\sqrt{3}, 0)$$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1);\ \ f''(x) = 6x - 6$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; f''(-1) < 0 \Rightarrow \text{máximo en } \left(-1, f(-1)\right) = (-1, 16) \\ x = 3; f''(3) > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } \left(3, f(3)\right) = (3, -16) \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \text{inflexión en } \left(1, f(1)\right) = (1, 0)$



4. (1,5 puntos) El espacio (en metros) recorrido por un móvil varía en función del tiempo (en segundos) según la fórmula

$$\mathbf{s(t) = \frac{t^2}{t+1}}$$

Halla el espacio recorrido y su velocidad instantánea a los 9 segundos.

Espacio recorrido: $s(9) = 8{,}1$ m. Velocidad instantánea: $s'(9)$; para ello calculamos primero $s'(t)$:

$$s'(t) = \frac{2t(t+1) - t^2}{(t+1)^2} = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} \Rightarrow s'(9) = \frac{81 + 18}{100} = 0{,}99 \text{ m/s}$$