**Matemáticas II. Examen de análisis. Día de** $π$ **de 2017.**

1. **(3 puntos)** Observa la gráfica de la función $y=f(x)$ teniendo en cuenta que las líneas discontinuas son asíntotas y contesta a las preguntas:



**a) ¿Dónde es derivable f?** No es derivable en $x=0$ (punto anguloso) ni en $x=1$ (discontinua). Es derivable en todos los demás valores.

**b) ¿Cuánto vale** $f^{'}\left(2\right)$**?** $f^{'}\left(2\right)=0,$ ya que ahí la tangente es horizontal

**c) ¿A qué tiende** $f'$ **cuando** $x→\infty $**?** Tiende a 1 (pendiente de la asíntota)

 **¿Y cuando** $x→-\infty $**?** Tiende a 0 (pendiente de la asíntota)

**e) Esboza la gráfica de la función derivada de la curva**

****

**2. (1,5 puntos) Halla** $a,b,c\in R$ **para que la función** $f\left(x\right)=x^{3}+ax^{2}+bx+c$ **tenga una inflexión en** $\left(-1,0\right)$ **y un extremo relativo en** $x=1$**. ¿Es este extremo un máximo o un mínimo?**

$$f^{'}\left(x\right)=3x^{2}+2ax+b; f^{''}\left(x\right)=6x+2a; f^{'''}\left(x\right)=6$$

Inflexión en $x=-1⇒f^{''}\left(-1\right)=0⇒2a-6=0⇒a=3$

Extremo en $x=1⇒f^{'}\left(1\right)=0⇒3+2a+b=0⇒b=-3-2a=-9$

Pasa por $(-1,0)⇒f\left(-1\right)=0⇒-1+a-b+c=0⇒c=1-a+b=1-3-9=-11$

Como $f^{''}\left(1\right)=6+2a=9>0⇒$el extremo relativo es un mínimo

**3. (3 puntos) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle. Utilízalos para demostrar que la ecuación** $2x^{7}+e^{x}=10 $**tiene solución y que ésta es única.**

Teorema de Bolzano:

 *Si f es una función continua en un intervalo* $\left[a, b\right]$ *y* $f\left(a\right)∙f\left(b\right)<0⇒∃c\in \left]a,b\right[ :f\left(c\right)=0$

Teorema de Rolle:

*Si f es una función continua en un intervalo* $\left[a, b\right]$ *, derivable en* $\left]a,b\right[,$ *y tal que* $f\left(a\right)=f(b)⇒$

$$⇒∃c\in \left]a,b\right[ :f'\left(c\right)=0$$

Sea $f\left(x\right)=2x^{7}+e^{x}-10 $**,** continua y derivable en todo $R$ (por serlo los polinomios y la exponencial). $f\left(0\right)=-9<0;f\left(2\right)=246+e^{2}>0⇒∃c\in \left]0, 2\right[:f\left(c\right)=0$, es decir, c es solución de la ecuación.

Supongamos que hubiera más de una solución, es decir, que $∃c, d:f\left(c\right)=f\left(d\right)=0⇒$

$⇒∃α\in \left]c, d\right[:f^{'}\left(α\right)=0,$ pero $f^{'}\left(x\right)=14x^{6}+e^{x}>0 ∀x\in R$, lo cual contradice la hipótesis de que hay más de una solución.

**4. (2,5 puntos) Calcula los siguientes límites:**

$$a) \lim\_{x→0}arc sen x cotg x= 0∙\infty = \lim\_{x→0}\frac{arc sen x}{tg x} =\frac{0}{0}=\left(L^{'}Hôpital\right)= \lim\_{x→0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}}{1+tg^{2} x} =1 $$

$$b)\lim\_{x→0} \sqrt[x]{\cos(x+sen x)}=\lim\_{x→0}\left(\cos(x+sen x)\right)^{\frac{1}{x}} =1^{\infty }=e^{\lim\_{x→0} \frac{\cos(x+sen x-1)}{x}}=e^{\frac{0}{0}}=\left(L^{'}H\right)=$$

$$=e^{\lim\_{x→0} (-sen x+\cos(x))}=e$$