Dos paralelas se amaban… desgraciadamente.
André Frédérique. Poeta francés (1915-1957)

Matemáticas II. Examen de Geometría analítica. 23.01.2018

1. Sea la recta $\mathbf{r}: \begin{cases} \mathbf{x - y + z = 0} \\ \mathbf{x + 3y = 1} \end{cases}$ **y el plano** $\boldsymbol{\pi \equiv 2x + y - z = 7}$

a) Estudia su posición relativa ***(1 punto)***

$$\overrightarrow{d_r} = (1,-1,1) \times (1,3,0) = (-3,1,4);\ \vec{n}_\pi = (2,1,-1); \overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n}_\pi \neq 0 \Rightarrow \text{ secantes}$$

b) Encuentra razonadamente la ecuación de un plano que pasa por el punto $\mathbf{P(2,0,-1)}$ **, es paralelo a r y perpendicular a π** ***(1 punto)***

Los vectores directores de dicho plano serán $\overrightarrow{d_r}$ y $\vec{n}_\pi$, luego su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 5y - 2z = 0$$

c) Halla la distancia entre el plano hallado y la recta r ***(1 punto)***

Al ser paralelos, la distancia entre ellos es la de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$P_r = (1,0,-1); d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|2+0-(-1)-7|}{\sqrt{2^2+1+1}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

2. Halla una recta s contenida en π y que corte perpendicularmente a r.

Sea $\overrightarrow{d_s}$ un vector de la recta buscada. Como las rectas son perpendiculares, sus vectores directores han de serlo también. Como s está contenida en π, $\overrightarrow{d_s}$ ha de ser también normal a $\vec{n}_\pi$. Por tanto podemos tomar $\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{d_r} \times \vec{n}_\pi = (-5,5,-5)$ o, con la misma dirección, (1, -1, 1) ***(1 punto)***

Además, la recta buscada ha de pasar por el punto $R = r \wedge \pi$: ***(1 punto)***

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-3t \\ y = t \\ z = -1+4t \end{cases}; 2(1-3t) + t - (-1+4t) = 7 \Rightarrow t = -\frac{4}{9} \Rightarrow R = \left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{9}, -\frac{25}{9}\right)$$

Por tanto,

$$s \equiv x - \frac{7}{3} = -y - \frac{4}{9} = z - \frac{25}{9}$$

3. Sean los puntos $\mathbf{A(0,-1,3), B(1,0,0), C(1,0,1)}$

a) Razona que no están alineados.

$\overrightarrow{AB} = (1,1,-3);\ \overrightarrow{AC} = (1,1,-2)$; tienen distinta dirección ya que sus coordenadas no son proporcionales. ***(0,5 puntos)***

b) Halla un punto P que equidiste de los tres y sea coplanario con ellos.

Sea $P(x,y,z)$ el punto buscado. Como es coplanario con A, B, C debe estar en el plano determinado por ellos, es decir,

$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 1$ ***(1 punto)***

Por otro lado, ***(1 punto):***

$$d(P,A)=d(P,B)\Rightarrow\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}\Rightarrow 2x+2y-6z+9=0$$

$$d(P,A)=d(P,C)\Rightarrow\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}\Rightarrow x+y+2z-4=0$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas; su solución corresponde a las coordenadas de P ***(0,5 puntos)***

$$\left.\begin{array}{r} x-y=1\\ 2x+2y+6z=-9\\ x+y+2z=4\end{array}\right\};\ \begin{vmatrix}1&-1&0\\2&2&6\\1&1&2\end{vmatrix}=-8;\, x=-\frac{1}{8}\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&2&-9\\1&1&-4\end{vmatrix}=-\frac{1}{4},\text{etc}$$

4. (2 puntos) Estudia la posición relativa de los planos $\boldsymbol{\pi_1,\pi_2,\pi_3}$ en función de $\mathbf{m}\in\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{l}\boldsymbol{\pi_1\equiv x+y+mz=1}\\ \boldsymbol{\pi_2\equiv mx+y+z=m}\\ \boldsymbol{\pi_3\equiv 3x+2y+3z=4}\end{array}$$

Si llamamos M a la matriz de coeficientes y $\overline{M}$ a la ampliada, $|M|=2m^2-6m+4=2(m-1)(m-2)$

Por tanto, si $m\neq 1,2\Rightarrow \text{rg } M=\text{rg}\overline{M}=3\Rightarrow$los planos están en posición general ***(0,75 punto)***

Si $m=1$ los planos π_1 y π_2 son coincidentes. ***(0,25 puntos)***

Si $m=2$ no hay paralelismos ni coincidencias y además $\text{rg } \overline{M}=\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\2&1&1&2\\3&2&3&4\end{array}\right)\overset{\substack{F_2:F_2-F_1\\F_3:F_3-2F_1}}{=}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&0&-1&1\\1&0&-1&2\end{array}\right)\overset{F_3:F_3-F_2}{=}\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&0&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right)=3;\text{rg } M=2\Rightarrow\text{están en “tienda de campaña”}$$