

Matemáticas I. Examen ordinario. 19.06.2018

1. Halla el dominio y los cortes con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 1 + \ln(x - 3)$ Dom: $]3, \infty[$; Cortes: No corta a OY, pues $0 \notin \text{Dom}$; $y = 0 \Rightarrow x = 3 + e^{-1}$

b) $g(x) = e^{x+1} - 2$ Dom: \mathbb{R} ; $x = 0 \Rightarrow y = e - 2$; $y = 0 \Rightarrow x = \ln 2 - 1$

2. Estudia el crecimiento y la curvatura (incluyendo posibles extremos relativos e inflexiones) de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

$$f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2; f''(x) = 12x - 18; f''(1) < 0 \Rightarrow \text{máximo en } x = 1$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } x = 2; f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (inflexión)}$$

3. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-3} & \text{si } x < 1 \\ 1 - \sqrt{x^2 + 3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}; f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(x-3)^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3}} & \text{si } x > 1 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{1-3} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - \sqrt{4} = -1 \Rightarrow \text{Es continua.}$$

$$f'_-(1) = \frac{-2}{(1-3)^2} = -\frac{1}{2}; f'_+(1) = \frac{-1}{\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{es derivable}$$

4. Halla las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$$

No hay oblicuas.

Hay una horizontal, $y = 0$, ya que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ Hay una vertical en $x = -1$, ya que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty$. En $x = 0$ no hay asíntota vertical, sino discontinuidad evitable, ya que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

5. Con una cartulina rectangular de 2×3 m se quiere construir una caja sin tapa, recortando un cuadrado en cada vértice. Estudia cómo varía el volumen de la caja en función de la longitud del lado del cuadrado recortado.

6. Queremos hallar la distancia entre dos torres A y B separadas por un precipicio. Para ello medimos desde un punto auxiliar C las distancias $AC=30$ m, $BC=45$ m, y el ángulo $\widehat{ACB} = 75^\circ$. Encuentra la distancia AB.

$$d^2 = 30^2 + 45^2 - 2 \cdot 30 \cdot 45 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 5^2 \cdot 3^2 (4 + 9 - 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = 15 \sqrt{13 - 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

7. Resuelve la ecuación $\cos 2x = \sin x$

$$1 - 2 \sin^2 x = \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \Rightarrow x = 30^\circ, 150^\circ + k360^\circ \\ -1 & \Rightarrow x = 270^\circ + k360^\circ \end{cases}$$

8. Sea $z = 2\frac{5\pi}{6}$. Representalo, exprésalo en forma binómica y halla z^6

$$2\frac{5\pi}{6} = 2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i; z^6 = 2^6_{6 \cdot 150^\circ} = 64_{900^\circ} = 64_{180^\circ} = -64$$

9. Sean las rectas

$$r \equiv x + 5y - 6 = 0; s \equiv \frac{x-1}{-5} = y + 3; t \equiv (x, y) = (2, 1) + \lambda(11, -2)$$

a) Dos de ellas son paralelas y otra secante: Identificalas.

$$d_r = (5, -1); d_s = (-5, 1); d_t = (11, -2); \Rightarrow r \parallel s \nparallel t$$

b) Halla la distancia entre las paralelas.

$$d(r, s) = d(P_s, r) = d((1, -3), r) = \frac{|1 + 5(-3) - 6|}{\sqrt{25 + 1}} = \frac{20}{\sqrt{26}}$$

c) Halla alguna razón trigonométrica del ángulo que forman las paralelas con la secante.

$$\cos(r, t) = \frac{d_r \cdot d_t}{|d_r| \cdot |d_t|} = \frac{57}{\sqrt{26} \cdot 125} = \frac{57}{5\sqrt{130}}$$

10. Halla $k \in \mathbb{R}$ para que los vectores $u(k, 3)$ y $v(2, -1)$ sean perpendiculares.

$$u \cdot v = 0 \Rightarrow 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

Criterios de evaluación	Ejercicio	
1.1. Explicar de forma razonada ...	Todos	
1.2. Resolver un problema, realizar los cálculos necesarios...	5, 6	
2.1. Números, sus operaciones...	Todos	
2.2. Números complejos ...	8	
3.1. Funciones elementales, que describan una situación real...	1-5	
3.2. Límite y continuidad ...	3-4	
3.3. Derivada ...	2-4	
3.4. Estudiar funciones ...	1-2-3-4	
4.1. Razones trigonométricas de un ángulo, de su doble y mitad...	7-8	
4.2. Resolver ecuaciones trigonométricas y triángulos ...	7-8	
4.3. Producto escalar y sus consecuencias.	10	
4.4. Ecuaciones de rectas, problemas de incidencia y cálculo de distancias.	9	