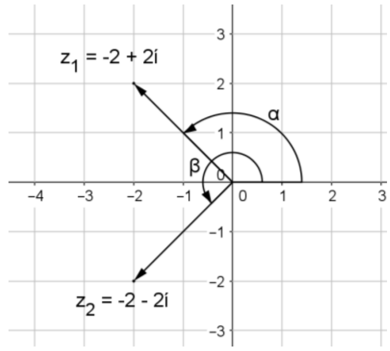
Matemáticas I. Examen final resuelto. 19.06.2017

1. Halla todas las soluciones de la ecuación $\mathbf{x^2+4x+8=0}$, represéntalas y exprésalas en forma polar.

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-4\pm 4i}{2}=-2\pm 2i$$
$$|z_1|=|z_2|=\sqrt{8}=2\sqrt{2};$$
$$\alpha=\arctan\frac{2}{-2}=\arctan -1=135°=\frac{3\pi}{4}\text{rad}$$
$$\beta=\arctan\frac{-2}{-2}=\arctan 1=225°=\frac{5\pi}{4}\text{rad}$$
$$\Rightarrow z_1=2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}};\ z_2=2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$$



2. Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000€; se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del dinero en dólares y que el valor de las libras sea la décima parte del valor de los euros. Una libra equivale a 1,5€ y un dólar a 1,1€, halla la cantidad de cada moneda que la empresa ha de tener disponible.

Si llamamos x al número de euros, y al de dólares y z al de euros, se tiene:
El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000€: $x+1{,}1y+1{,}5z=264000$;
El valor del dinero en euros es el doble del dinero en dólares: $x=2\cdot 1{,}1y$
El valor de las libras es la décima parte del valor de los euros: $1{,}5z=x/10$
Con lo que se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+1{,}1y+1{,}5z=264000\\ x-2{,}2y=0\\ x-15z=0\end{array}\right\}\Rightarrow x+\frac{x}{2}+\frac{x}{10}=264000\Rightarrow x=16500, y=7500, z=1100$$

3. El número de bacterias de un cultivo se duplica cada tres días. Un día se contabilizan 3000 bacterias.

a) Calcula el número de bacterias que habrá 15 días después.

Se habrá duplicado 5 veces, es decir, multiplicado por 2^5 ⇒habrá $3000\cdot 2^5=96000$

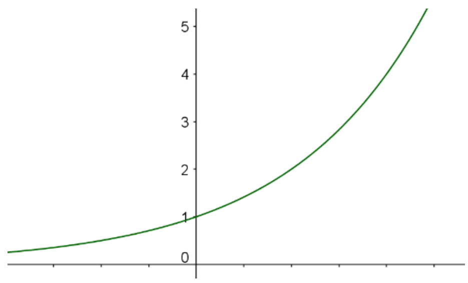
b) Si la población se estabiliza al alcanzar 20000 bacterias ¿Cuántos tiempo pasará para ello?

$$3000\cdot 2^{\frac{x}{3}}=20000\Rightarrow 2^{\frac{x}{3}}=\frac{20}{3}\Rightarrow\frac{x}{3}=\log_2\frac{20}{3}\Rightarrow x=3\log_2\frac{20}{3}\cong 8{,}2$$

c) representa la función correspondiente.

$f(x)=2^x$ si x son pares de días,

o $f(x)=2^{\frac{x}{2}}=\sqrt{2}^x$ si x son días



4. La liberación de cierto gas durante una reacción química, en cm^3, varía a lo largo del tiempo según la fórmula, donde x es el tiempo en segundos. ¿En qué momento la liberación es máxima? ¿Cuál es ésta?

$$\mathbf{f(x)=\frac{3x}{x^2+1}}$$

$$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1;$$

$\text{Si } 0<x<1 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \text{f es creciente; si } x>1 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \text{f es dereciente}$

Por tanto el valor máximo se alcanza en $x=1$ y vale $f(1)={}^{3}\!/_{2}$

¿A qué valor tiende esta liberación con el tiempo?

$\text{Tiende a } \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}=0$

5. Halla $\mathbf{a,b}\in\mathbb{R}$ para que la función $\mathbf{f(x)=\begin{cases} ax+b \text{ si } x<4 \\ \ln(x^2-15) \text{ si } x\geq 4\end{cases}}$ sea continua y derivable

$$f'(x)=\begin{cases} a & \text{si } x<4 \\ \dfrac{2x}{x^2-15} & \text{si } x\geq 4\end{cases}$$

$\text{f es continua en 4} \Leftrightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x) \Leftrightarrow 4a+b=0$

$\text{f es derivable en 4} \Leftrightarrow f'_-(4)=f'_+(4) \Leftrightarrow a=8 \Rightarrow b=-32$

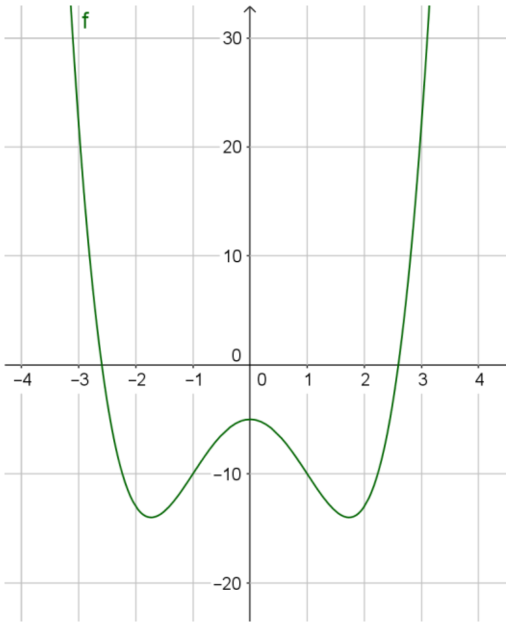
6. Estudia y representa la función $\mathbf{f(x)=x^4-6x^2-5}$, incluyendo simetría, cortes con los ejes, extremos relativos y crecimiento, curvatura e inflexiones.

Es simétrica par.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3+\sqrt{14}};\ x=0 \Rightarrow y=f(0)=-5$

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3);$

$f''(x)=12x^2-12;\ f'''(x)=24x$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}, x = 0;$

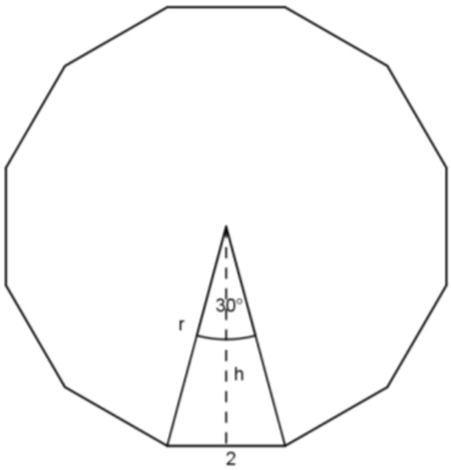
$f''(0) < 0 \Rightarrow \text{máx. en } (0, -5);$

$f''(\pm\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow \text{mín. en } (\pm\sqrt{3}, -14)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$f'''(\pm 1) \neq 0 \Rightarrow \text{inflexiones en } (1, -10) \text{ y en } (-1, 10)$

7. Disponemos de 12 vallas de contención de dos metros de largo cada una, que queremos colocar formando un polígono regular, para improvisar una zona de juegos. ¿Cuál será el diámetro máximo del recinto así obtenido? ¿Y su superficie?



Ángulo central: 360°/12=30°

Teorema del coseno: $4 = 2r^2 - 2r^2 \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{4}{2 - 2\cos 30°}} = \sqrt{\dfrac{4}{2 - \sqrt{3}}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Por tanto el diámetro será $4\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cong 7{,}7 \text{ m}$

$\text{tg } 15° = \dfrac{1}{h} \Rightarrow h = \dfrac{\cos 15}{\text{sen } 15} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Área} = 12(2 + \sqrt{3}) \cong 45 \text{ m}^2$

8. Sean los puntos A(2,-5), B(3, 0) y C(k, 2). Obtén en cada caso el valor de k para que:
a) Formen un triángulo de 4 u. c. de área.

Si tomamos como base el lado AB, se tendrá que la base mide $|\overrightarrow{AB}| = |(1,5)| = \sqrt{26}$;

la altura será entonces la distancia del punto C a la recta $\overline{AB}$;

Recta $\overline{AB} \equiv 5x - y = 15$;

$$d(C, \overline{AB}) = \frac{|5k - 2 - 15|}{\sqrt{26}} = \frac{|5k - 17|}{\sqrt{26}}$$

Por tanto,

$$4 = \frac{1}{2}\sqrt{26} \cdot \frac{|5k - 17|}{\sqrt{26}} \Rightarrow |5k - 17| = 8 \Rightarrow 5k - 17 = \pm 8 \Rightarrow k = \frac{17 \pm 8}{5} = \begin{cases} 5 \\ \frac{9}{5} \end{cases}$$

b) La recta AC sea paralela a $\mathbf{r \equiv 7x - 3y = 0}$

$$\vec{d}_r = (3, 7);\ \overrightarrow{AC} = (k - 2, 7);\ \vec{d}_r \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{3}{k - 2} = \frac{7}{7} \Leftrightarrow k = 5$$