Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico.
Leonhard Euler. Matemático suizo (1707-1783)

Matemáticas II. Examen de Álgebra. 30.10.2018

1. (2 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ a & b & c \\ x & 2y & 3z \end{vmatrix} = 2$ y utilizando las propiedades del determinante, deduce el valor de:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{10x} & \mathbf{20y} & \mathbf{30z} \\ \mathbf{a+1} & \mathbf{b} & \mathbf{c-3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -20 \begin{vmatrix} x & 2y & 3z \\ a+1 & b & c-3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -20 \begin{vmatrix} x & 2y & 3z \\ a & b & c \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ a & b & c \\ x & 2y & 3z \end{vmatrix} = 40$

(1): Extraemos factor común en 1ª y 3ª fila; (2) Sumamos $-F_3$ a F_2, con lo que el determinante no varía; (3): permutamos F_1 y F_3, con lo que cambia el signo.

b) $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{x} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{2y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{c} & \mathbf{3z} \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -5 \begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 0 & b & 2y \\ -3 & c & 3z \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ a & b & c \\ x & 2y & 3z \end{vmatrix} = -10$

(1): desarrollamos por la 1ª columna; (2) Transponemos (el determinante no varía)

2. **(2 puntos)**

a) Despeja X de la ecuación matricial

$A^2X - B = 3X \Rightarrow A^2X - 3X = B \Rightarrow (A^2 - 3I)X = B \Rightarrow X = (A^2 - 3I)^{-1}B$

b) Halla el valor de X cuando $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = C;\ |C| = -3;\ C^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

3. **(4 puntos) Sea el sistema de ecuaciones** $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

a) Estúdialo según los valores de a$\in \mathbb{R}$.

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2; \quad |A| = 0 \Leftrightarrow a = -1, a = 2$

→Si $a \neq 2, -1 \Rightarrow \text{rg}\,(A) = 3 \Rightarrow \text{rg}(\overline{A}) = 3 \Rightarrow$ compatible sin grados de libertad (determinado)

→Si $a = -1 \Rightarrow \text{rg}(\overline{A}) = \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \underset{F_3: F_3 - F_1}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{F_3: F_3 - 2F_2}{=}$

$= \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = 3$ pero $\text{rg}(A) = 2 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

→Si $a = 2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\overline{A}) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \underset{F_3:F_3-F_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) = 2 = \mathrm{rg}(A)$ (ya que las dos últimas filas son proporcionales) ⇒el sistema es compatible indeterminado.

b) Resuélvelo cuando sea indeterminado y halla la solución particular en la que $\mathbf{y = 2 - x}$

Escribimos el sistema obtenido:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\} \overset{2^{a}}{\Rightarrow} x = 1 - 2z \overset{1^{a}}{\Rightarrow} y = z - 2x = z - 2(1 - 2z) = 5z - 2$$

Con lo cual la solución general es: $\{x = 1 - 2z;\quad y = 5z - 2;\quad z = z\}$

Solución particular con $y = 2 - x \Rightarrow 5z - 2 = 2 - 1 + 2z \Rightarrow z = 1 \Rightarrow \{x = -1,\ \ y = 3,\ \ z = 1\}$

4. 4. **(2 puntos) Elige una de las dos propuestas:**

Propuesta 1: Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{x + 2y - z} & = & \mathbf{3} \\ \mathbf{x + y + 5z} & = & \mathbf{5} \\ \mathbf{2x + 3y \ldots} & = & \ldots \end{array}\right\}$$

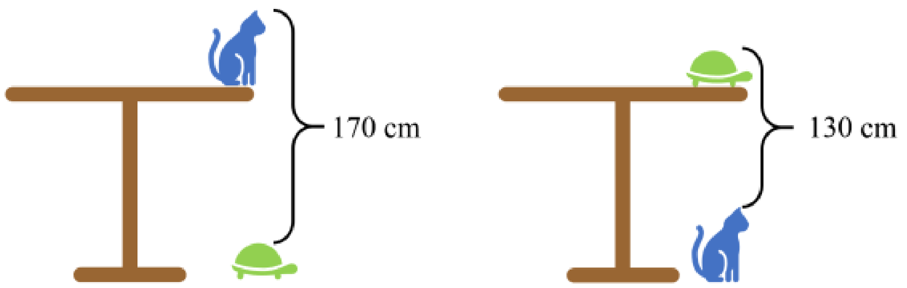
a) Completa la tercera ecuación de forma que el sistema sea indeterminado.

Para que eso ocurra ha de ser rg(A)=2=rg($\overline{A}$); lo conseguimos poniendo 4z=8 (para que la 3ª fila sea suma de los dos primeras).

b) Completa la tercera ecuación de forma que el sistema sea incompatible. En ambos casos, explica el porqué de lo que haces.

Para que eso ocurra ha de ser rg(A)=2, rg($\overline{A}$)=3; lo primero lo conseguimos poniendo 4z (para que la 3ª fila de A sea suma de los dos primeras) y algo ≠8 en el término independiente (para que la 3ª fila de $\overline{A}$ no sea combinación lineal de las primeras).

Propuesta 2: Plantea un sistema de ecuaciones para calcular las alturas del gato, de la tortuga y de la mesa. ¿Es posible conocer el valor de cada una de ellas? Razona tu respuesta.



$$\left.\begin{array}{r} m + g - t = 170 \\ m + t - g = 130 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_2:F_2+F_1} \left.\begin{array}{r} m + g - t = 170 \\ 2m = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 150; g = g; t = g - 20$$

Por tanto, aunque el sistema es indeterminado, se puede hallar la altura de la mesa, pero no las del gato y la tortuga.