La simplicidad no es lo simple, sino lo complejo sintetizado.
Alfred Jarry. Literato francés (1873-1907)

Matemáticas II. Examen de Álgebra (2ª oportunidad). 16.11.2018

1. (2 puntos) En un colegio se sirven dos tipos de menú. La matriz A muestra la cantidad de menús de cada tipo que han consumido tres hermanos en la última semana. La matriz B muestra la cantidad, en mg, de carbohidratos, grasas y proteínas que contiene cada tipo de menú. Encuentra razonadamente una matriz que nos informe sobre la cantidad de carbohidratos, grasas y proteínas consumidas por cada niño en la última semana.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H_1 & H_2 & H_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ M_1 \\ M_2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 800 \\ 7 & 15 \\ 150 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Carbohidratos} \\ \text{Grasas} \\ \text{Proteínas} \end{array}$$

Para calcular por ejemplo los carbohidratos que ha consumido H_1 tendremos que hacer $3 \cdot 500 + 2 \cdot 800$, ie, multiplicar la primera fila de B por la primera columna de A. Por tanto, habrá que hacer el producto $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 500 & 800 \\ 7 & 15 \\ 150 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3100 & 3700 & 2500 \\ 51 & 67 & 35 \\ 650 & 550 & 750 \end{pmatrix}$$

Donde las filas indican si se trata de carbohidratos, grasas o proteínas y la columna indica el hermano.

2. **(2 puntos)**

a) Si A, B y X son matrices, despeja la X en la ecuación $\mathbf{3 \cdot X \cdot A^{25} - B = X}$

$3 \cdot X \cdot A^{25} - B = X \Rightarrow 3 \cdot X \cdot A^{25} - X = B \Rightarrow X \cdot (3 \cdot A^{25} - I) = B \Rightarrow X = B \cdot (3 \cdot A^{25} - I)^{-1}$

b) Halla el valor de X para $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, etc.

Podemos concluir que $A^{25} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \cdot 25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = 3 \cdot A^{25} - I = \begin{pmatrix} 2 & 300 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$|C| = 4; \mathrm{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -300 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -300 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -150 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -147 \end{pmatrix}$

3. (1 punto) Sin desarrollarlo y utilizando únicamente las propiedades de los determinantes, demuestra que el de A es nulo:

$$\mathbf{A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+2 & a+3 \\ a & a+4 & a+5 \end{pmatrix}}$$

$|A| = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+2 & a+3 \\ a & a+4 & a+5 \end{vmatrix} \overset{*}{=} \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos filas proporcionales ($F_3 = 3F_2$).

(*): hemos restado la primera fila a la segunda y a la tercera, lo cual no cambia el valor del determinante.

4. (3 puntos) Estudia el rango de M en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{2} \\ \mathbf{a} & \mathbf{a-1} & \mathbf{1} & \mathbf{a+1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Cogemos un menor 3x3 de la matriz, por ejemplo el formado por las tres primeras columnas y hallamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & a-1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2;\ |A| = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ó } a = 2$$

Por tanto, si $a \neq 1, 2 \Rightarrow \mathrm{rg}(M) = 3$ ya que al menos es 3 y no puede ser mayor (tiene 3 filas).

Si $a = 1 \Rightarrow \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2$, ya que las dos primeras filas son iguales y la 3ª no es proporcional

Si $a = 2 \Rightarrow \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$, ya que el menor formado por las tres últimas columnas es regular.

(1): hemos restado a las dos últimas filas el doble de la 1ª. (2) Hemos restado la segunda fila a la tercera

5. (2 puntos) Los 134 asistentes al último congreso de Patafísica y Pafáfora han llenado las 68 habitaciones del hotel Jarry. En este hotel hay habitaciones individuales, dobles y triples.

a) Plantea un sistema para hallar el número de habitaciones de cada tipo y resuélvelo.

Sea x el número de habitaciones individuales, etc.

$$\begin{cases} x + y + z = 68 \\ x + 2y + 3z = 134 \end{cases} \overset{e_2 - e_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 68 \\ y + 2z = 66 \end{cases} \overset{(2^a)}{\Longrightarrow} y = 66 - 2z \overset{(1^a)}{\Longrightarrow} x = z + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 66 - 2z \\ z = z \end{cases} \text{(Sol. General)}$$

b) ¿Puede haber 34 habitaciones triples? ¿Y 20? ¿Por qué?

El sistema es indeterminado con un grado de libertad (admite infinitas soluciones), pero en ninguna de ellas la "z" puede valer 34, ya que eso supondría que $y = -2$, lo cual no tiene sentido.

En cambio, $z = 20 \Rightarrow x = 22, y = 26$ lo cual sí es válido.