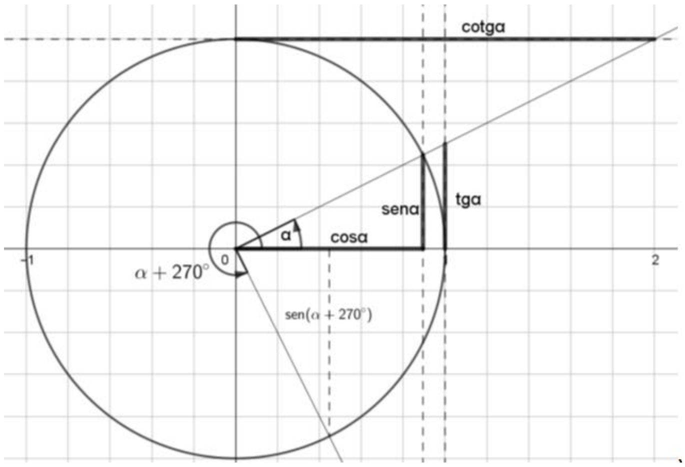
La "realidad" reconozco que nunca he sabido muy bien lo que es; lo que, en cambio, veo y distingo por todas partes son las irrealidades.

Rafael Sánchez Ferlosio. Escritor español nacido en 1927.

Matemáticas I. Examen de trigonometría y complejos. 03.05.2018

1. a) Representa con todas sus razones el ángulo del 1er cuadrante cuya cotangente vale 2.

b) Si llamamos α a dicho ángulo, ¿qué relación habrá entre sus razones trigonométricas y las de $\alpha + 270°$?



Como se ve en el dibujo,

$\operatorname{sen}(\alpha + 270°) = -\cos\alpha$;

$\cos(\alpha + 270°) = \operatorname{sen}\alpha$

Y, por tanto,

$\operatorname{tg}(\alpha + 270°) = -\operatorname{cotg}\alpha$

2. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y que $\alpha\epsilon\mathrm{II}$, halla el valor exacto de:

Calculamos primero su coseno (negativo, por ser $\alpha\epsilon\mathrm{II}$):

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{5}} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\mathbf{a)}\ \mathbf{sen}\left(\boldsymbol{\alpha}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right) = \operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15}-2\sqrt{5}}{10}$

$\mathbf{b)}\ \mathbf{cos(2\boldsymbol{\alpha})} = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

3. a) Comprueba que $\mathbf{x = 55°}$ verifica la igualdad:

$$\mathbf{sen^2}\left(\frac{\mathbf{x+20°}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\mathbf{2-\sqrt{2}\cos 30° + \sqrt{2}\operatorname{sen} 30°}}{\mathbf{4}}$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{55°+20°}{2}\right) = \left(\sqrt{\frac{1-\cos(75°)}{2}}\right)^2 \overset{*}{=} \frac{1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

$(*)$: $\cos 75° = \cos(45°+30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{2-\sqrt{2}\cos 30° + \sqrt{2}\operatorname{sen} 30°}{4} = \frac{2-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{4} = \frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

b) Encuentra todos los demás valores de x que la verifican.

Sabemos, por el apartado anterior, que $x = 55°$ verifica la igualdad, por tanto,

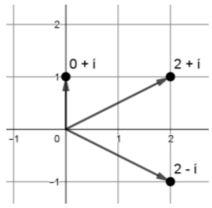
$$\text{sen}^2\left(\frac{x+20°}{2}\right)=\text{sen}^2\left(\frac{75°}{2}\right)\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{x+20°}{2}\right)=\pm\text{sen}\left(\frac{75°}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x+20°}{2}=\dfrac{75°}{2}+k180°\\[4pt] \dfrac{x+20°}{2}=\dfrac{105°}{2}+k180°\end{cases}$$

$$\frac{x+20°}{2}=\frac{75°}{2}+k180°\Rightarrow x=55°+k360°;\quad \frac{x+20°}{2}=\frac{105°}{2}+k180°\Rightarrow x=85°+k360°$$

4. Resuelve las ecuaciones en $\mathbb{C}$ y representa sus soluciones.

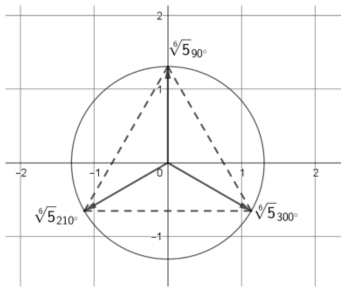
a) $\mathbf{x^3-(4+i)x^2+(4i+5)x-5i=0}\xRightarrow{\text{Ruffini}}(x-i)(x^2-4x+5)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=i\\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=2\pm i\end{cases}$$

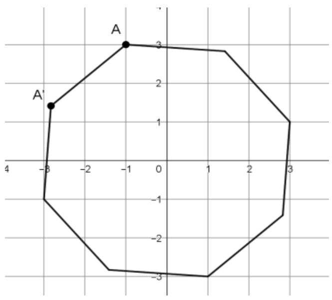


b) $\mathbf{z^3+\sqrt{5}\,i=0}\Rightarrow z=\sqrt[3]{-\sqrt{5}\,i}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}\right)_{270°}}=\left(\sqrt[6]{5}\right)_{\frac{270°+k360°}{3}}=$

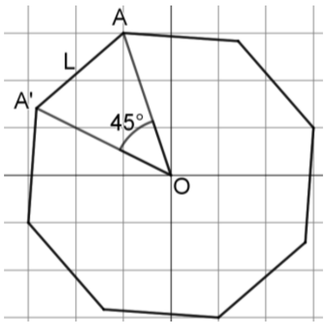
$$=\left(\sqrt[6]{5}\right)_{90°+k120°}=\begin{cases}\left(\sqrt[6]{5}\right)_{90°}\\ \left(\sqrt[6]{5}\right)_{210°}\\ \left(\sqrt[6]{5}\right)_{3000°}\end{cases}$$



5. Teniendo en cuenta que el centro del octógono regular de la figura es el origen de coordenadas,



a) Halla su perímetro.



El radio del octógono es $\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10}$

Si llamamos L al lado, por el teorema del coseno,

$$L^2=\left(\sqrt{10}\right)^2+\left(\sqrt{10}\right)^2-2\left(\sqrt{10}\right)^2\cos 45°=20-10\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L=\sqrt{20-10\sqrt{2}}\Rightarrow p=8\sqrt{20-10\sqrt{2}}$$

b) Encuentra las coordenadas de A’

Tenemos que rotar A 45°, o, lo que es lo mismo, multiplicar el número complejo de afijo A por otro de modulo 1 y argumento 45°

$$(-1+3\mathrm{i})\cdot 1_{45^\circ} = (-1+3\mathrm{i})\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}-\frac{3\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}' = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}\,)$$