La inteligencia no es no cometer errores, sino descubrir el modo de sacarles provecho.
Bertolt Brecht. Escritor alemán (1898-1956)

Matemáticas académicas 4º ESO. Examen de Geometría.

1. (2 puntos)

a) La matrioshka de la derecha mide 6cm de altura y pesa 100g. Teniendo en cuenta que son huecas y están elaboradas con el mismo material ¿Cuál será el peso aproximado de la de la izquierda, que tiene una altura de 10 cm?

Si llamamos P al peso de la grande, y teniendo en cuenta que al ser huecas este peso depende de la superficie,

$$\mathrm{r}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3};\ \frac{\mathrm{P}}{100}=\mathrm{r}^2\Rightarrow \mathrm{P}=100\cdot\frac{25}{9}\approx 278\mathrm{g}$$

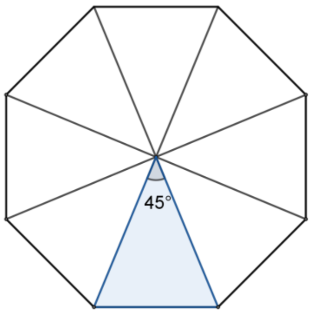
b) Supongamos ahora que fuesen macizas y la mayor pesara 700 g ¿Cuánto pesaría en ese caso la pequeña?

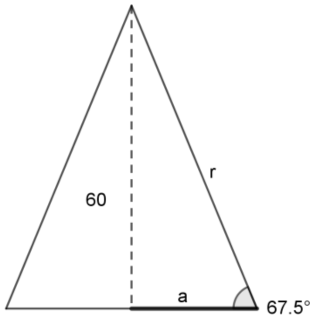
En ese caso, el peso depende del volumen. Llamando p al peso de la pequeña, se tiene que

$$\frac{700}{\mathrm{p}}=\mathrm{r}^3\Rightarrow \mathrm{p}=\frac{700}{\mathrm{r}^3}=\frac{700\cdot 27}{125}=\frac{28\cdot 27}{5}\approx 151\mathrm{g}$$

2. (3 puntos) Halla el diámetro, el área y el perímetro de la señal de tráfico.

Si el ancho es 120, la apotema medirá 60cm. Cada uno de los 8 triángulos isósceles que forman el octógono será así:





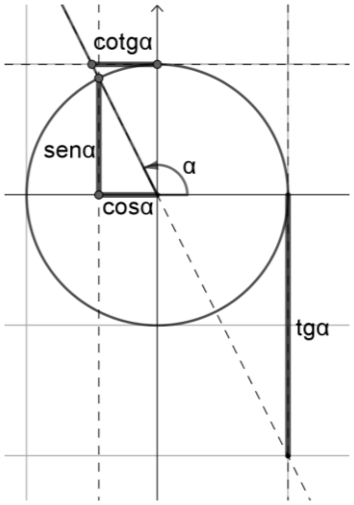
$$\mathrm{sen}\ 67{,}5° = \frac{60}{\mathrm{r}}\Rightarrow \mathrm{r}=\frac{60}{\mathrm{sen}\ 67{,}5°}\Rightarrow \mathrm{d}=2\mathrm{r}=\frac{120}{\mathrm{sen}\ 67{,}5°}\approx 130\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{tg}\ 67{,}5° = \frac{60}{\mathrm{a}}\Rightarrow \mathrm{a}=\frac{60}{\mathrm{tg}\ 67{,}5°};$$

Con lo cual el perímetro valdrá $16\cdot \mathrm{a} = 960/\,\mathrm{tg}\ 67{,}5° \approx 398\mathrm{cm}$ y el área será

$$8\cdot \mathrm{a}\cdot 60=\frac{480\cdot 60}{\mathrm{tg}\ 67{,}5°}\approx 11929\mathrm{cm}^2$$

3. (3 puntos) Representa en la circunferencia goniométrica el ángulo del 2º cuadrante cuya tangente vale -2. Representa también sus otras razones y halla su valor numérico exacto. ¿Qué otro ángulo tiene el mismo seno que α?



$$\text{cotg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$$

Si llamamos s a sen α y c a cos α, se tiene el sistema

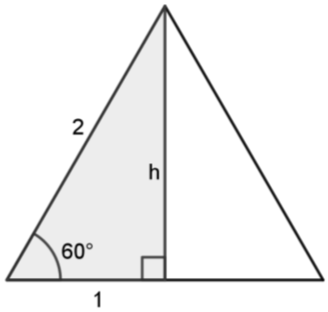
$$\left.\begin{matrix} s^2 + c^2 = 1 \\ \dfrac{s}{c} = -2 \end{matrix}\right\} \overset{2^{\underline{a}}}{\Rightarrow} s = -2c \overset{1^{\underline{a}}}{\Rightarrow} (-2c)^2 + c^2 = 1 \Rightarrow 5c^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

El otro ángulo que tiene el mismo seno que α es su simétrico respecto al eje OY, es decir, $180° - \alpha$

4. (2 puntos) Deduce razonadamente las razones trigonométricas de los ángulos de 60° y de 120°. Exprésalos en radianes.

$$60° = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}; \quad 120° = \frac{2\pi}{3}\,\text{rad}$$

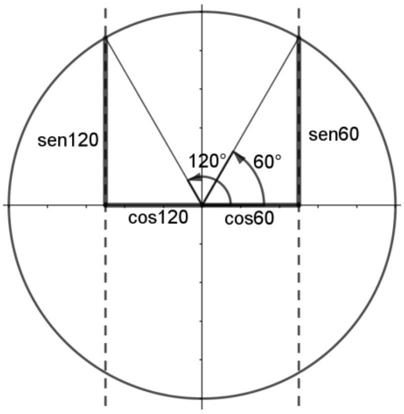


El ángulo de 60° aparece en los triángulos equiláteros. Si dibujamos uno de lado 2 y trazamos su altura, por Pitágoras,

$$h^2 + 1 = 4 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

Por tanto,

$$\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60° = \frac{1}{2}; \quad \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$$



Como el dibujo es simétrico respecto al eje OY, se ve que

$$\text{sen}\,120° = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

Y por tanto, $\text{tg}\,120° = -\sqrt{3}$