A la verdad se llega antes a través del error que de la confusión.
Francis Bacon (1561-1626). Filósofo inglés.

Matemáticas I. Examen de números y sucesiones reales. 30.10.2017

1. Deduce las dimensiones de una hoja DIN A0 sabiendo que su superficie es de 1 m^2. Expresa el resultado exacto de todas las formas posibles y después aproxímalo a mm. (Se recuerda que las hojas DIN tienen la propiedad de que al doblarlas perpendicularmente al lado mayor por su punto medio se obtiene un rectángulo semejante al inicial).

Sea x el lado menor en metros. Como sabemos que la relación entre los lados de los rectángulos DIN es $\sqrt{2}$, el lado mayor debe medir $x\sqrt{2}$. Por tanto,

$$x^2\sqrt{2} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 2^{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} = 0{,}84089\ldots\,\mathrm{m} = 841\ \mathrm{mm}$$

$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} = 1{,}1892\ldots\,\mathrm{m} = 1189\ \mathrm{mm}$$

2. Comprueba, operando convenientemente, que $\boldsymbol{\varphi^2 = \varphi + 1}$ y que $\boldsymbol{\varphi^{-1} = \varphi - 1}$, siendo

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi^{-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \varphi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

3. Estudia la monotonía de la sucesión

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2-n}{3n}}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2-(n+1)}{3(n+1)} - \frac{2-n}{3n} = \frac{1-n}{3(n+1)} - \frac{2-n}{3n} = \frac{(1-n)n-(n+1)(2-n)}{3n(n+1)} =$$

$$= \frac{n-n^2-2n+n^2-2+n}{3n(n+1)} = \frac{-2}{3n(n+1)} < 0\quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} < a_n\quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{decreciente}$$

4. Razona si 1 es o no una cota superior de la sucesión del ejercicio anterior.

$$1 - a_n = 1 - \frac{2-n}{3n} = \frac{3n-2+n}{3n} = \frac{4n-2}{3n} > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 > a_n\quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \text{ es cota superior}$$

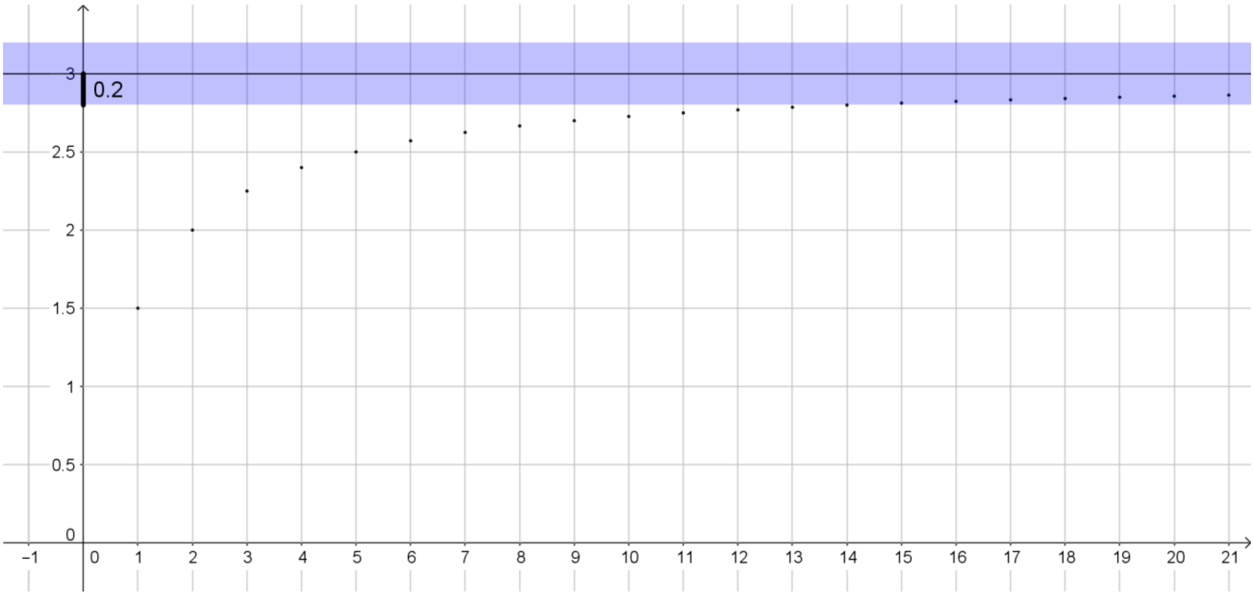
5. Encuentra a partir de qué término todos los siguientes de la sucesión convergente b_n distan de su límite menos de 0,2 e ilustra con una representación gráfica adecuada lo que estás haciendo.

$$\boldsymbol{b_n = \frac{3n}{n+1}}$$

$$\lim \frac{3n}{n+1} = 3;\ |3 - b_n| = \left|3 - \frac{3n}{n+1}\right| = \left|\frac{3n+3-3n}{n+1}\right| = \left|\frac{3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1};$$

$$|3 - b_n| < 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{n+1}{3} > 5 \Leftrightarrow n > 14 \Leftrightarrow \text{a partir de } b_{15}$$

Gráficamente: si pintamos en torno a la recta y=3 una franja horizontal de semianchura 0.2, estamos viendo que a partir de b_{15} todos los siguientes términos de la sucesión quedan dentro de la franja:



6. Comprueba que hay un término a partir del cual todos los $c_n = \sqrt{3n-2}$ son mayores de 50 y encuentra ese término.

$$c_n > 50 \Leftrightarrow \sqrt{3n-2} > 50 \Leftrightarrow 3n - 2 > 2500 \Leftrightarrow n > \frac{2502}{3} \Leftrightarrow n \geq 835 \Rightarrow \text{el término buscado es } c_{835}$$

7. ¿Puede una sucesión acotada no ser convergente? Justifica tu respuesta. *(1 punto)*

Sí, pero para ello no puede ser monótona (ya que monótona y acotada implica convergente). Podemos por tanto tomar una que cambie de signo y de forma que los pares tiendan a un valor y los impares a otro, como por ejemplo

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1, ya que la fracción siempre está entre 0 y 1. Pero no es convergente, ya que los términos de subíndice par tienden a 1 y los de subíndice impar a -1.

Los ejercicios 1 al 6 valen 1,5 puntos cada uno.

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje	
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas (15%)		
1. Explicar de forma razonada la resolución de un problema. (3%)	1.1. Expresa de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, con rigor y precisión	Todos
2. Resolver un problema, realizar los cálculos necesarios y comprobar las soluciones. (3%)	2.1. Comprende el enunciado de un problema, lo formaliza matemáticamente y lo relaciona con el número de soluciones.	Todos
	2.2. Realiza estimaciones y predicciones sobre la solución del problema	
	2.3. Establece una estrategia de investigación y encuentra las soluciones del problema.	
3. Demostrar teoremas con los distintos métodos fundamentales (demostración directa, por reducción al absurdo o inducción). (2%)	3.1. Conoce distintos métodos de demostración.	2, 7
	4.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados.	Todos
	7.2. Identifica situaciones reales, susceptibles de contener problemas de interés y analiza la relación entre la realidad y matemáticas.	1
	7.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema dentro del campo de las matemáticas.	1
Bloque 2: Números y álgebra. (10%)		
1. Conocer las sucesivas ampliaciones del concepto de número, sus operaciones, propiedades, estructura de la recta real y las utilidades de los mismos. (3%)	1.1 Reconoce los distintos tipos de números y opera y resuelve problemas con ellos.	1, 2
	1.2 Conoce y aplica los conceptos de valor absoluto y desigualdad para representar intervalos y entornos de puntos de la recta real.	3,4,5,6
3. Conocer el número e como límite de una sucesión y resolver problemas extraídos de contextos reales utilizando logaritmos. (2%)	3.3. Reconoce sucesiones monótonas y acotadas y entiende, de manera intuitiva, el concepto de límite de una sucesión.	3,4,5,6,7
4. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando recursos algebraicos (ecuaciones, inecuaciones y sistemas) e interpretando críticamente los resultados.	4.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones (algebraicas o no algebraicas) e inecuaciones (primer y segundo grado), e interpreta los resultados en el contexto del problema	1,2,3,4,5,6