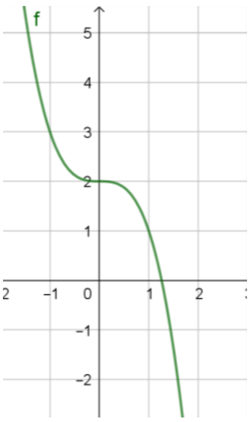
La verdadera definición de la ciencia es el estudio de la belleza del mundo.
Simone Weil. Filósofa francesa (1909-1943).

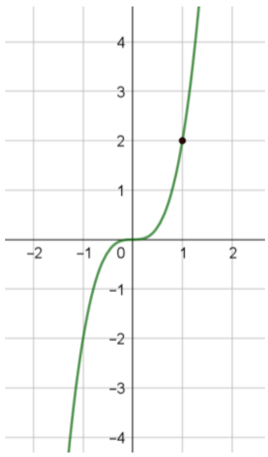
Matemáticas 1. Examen de análisis (funciones polinómicas). 12.12.2018.

1. (1,5 puntos) Las siguientes gráficas se han obtenido a partir de la de la función $\mathbf{f(x) = x^3}$. Encuentra la expresión algebraica de cada una de ellas.

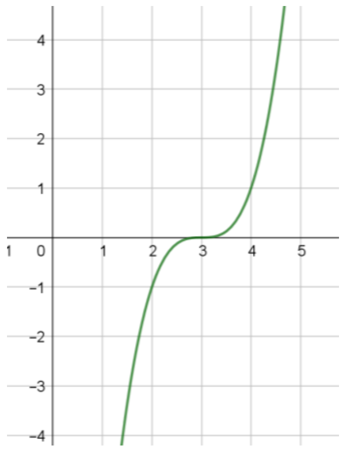
a) $f(x) = -x^3 + 2$, ya que se ha dado la vuelta (cambio de signo) y se ha trasladado 2 uds hacia arriba (y+2)



b) $f(x) = 2x^3$, ya que se ha dilatado verticalmente de forma que f(1)=2



c) $f(x) = (x-3)^3$, ya que se ha trasladado 3 uds a la derecha.



2. (2,5 puntos) El espacio (en metros) recorrido por un móvil viene dado por la fórmula $\mathbf{f(t) = t^2 + 5t + 1}$, donde t representa el tiempo en segundos.

a) Halla la velocidad media del móvil durante los 4 primeros segundos.

$$\mathrm{TVM}_f[0,4] = \frac{f(4) - f(0)}{4} = \frac{37 - 1}{4} = 9\mathrm{m/s}$$

b) Halla su velocidad media en un intervalo de tiempo que comienza en el instante $\mathbf{t = 2}$ y dura h segundos.

$$\mathrm{TVM}_f[2,2+h] = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 5(2+h) + 1 - 15}{h} =$$

$$= \frac{4 + 4h + h^2 + 10 + 5h + 1 - 15}{h} = \frac{h^2 + 9h}{h} = h + 9$$

c) Halla su velocidad instantánea en el instante $\mathbf{t = 2}$.

Podemos hacerlo calculando $f'(2)$ después de hallar $f'(t) = 2t + 5$ con las reglas de derivación, o bien hacer $h \to 0$ en el apartado b. En los dos casos obtenemos que la velocidad instantánea es $9\mathrm{m/s}$

3. (4 puntos) Dibuja la gráfica de $\mathbf{f(x) = x^3 - 6x}$ después de hacer un estudio completo de la función (simetría, extremos relativos, inflexiones, cortes con los ejes…)

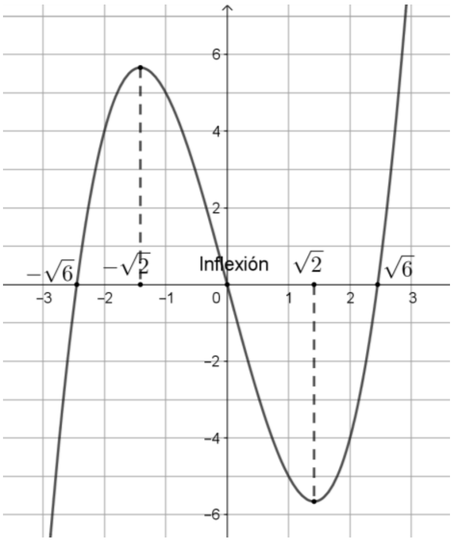
Es impar, ya que $f(-x) = -f(x)$

Cortes con OX: $x^3 - 6x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{6}$

$f'(x) = 3x^2 - 6;\;\; f''(x) = 6x;\;\;\; f'''(x) = 6;$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2};\;\; f''(\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow$mínimo en $(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

Por simetría, habrá un máximo en $(-\sqrt{2},\; 4\sqrt{2})$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0; f'''(x) \neq 0 \Rightarrow$inflexión en $(0,0)$
Por tanto, la gráfica quedará así:



Responde después a las siguientes preguntas:
a) ¿En qué intervalo o intervalos es $\mathbf{x^3 - 6x} < 0$?
En $]-\infty, -\sqrt{6}[\, \cup\,]0, \sqrt{6}[$

b) ¿En qué intervalo o intervalos es f creciente?
En $]-\infty, -\sqrt{2}[\, \cup\,]\sqrt{2}, \infty[$

c) ¿En qué intervalo o intervalos es f cóncava (vista desde arriba)?
En $]0, \infty[$

4. (2 puntos) Encuentra una función cúbica que tenga un extremo relativo de abscisa $-\mathbf{1}$ y en $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ una inflexión de tangente paralela a la recta de ecuación $\mathbf{y = 6x}$

La función será de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; por tanto,

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c;\;\; f''(x) = 6ax + 2b$

f tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $-1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0(*)$

f pasa por $(0,3) \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow \boxed{d = 3}$

f tiene una inflexión en $(0,3) \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

La tangente a f en $(0,3)$ es paralela a $y = 6x \Rightarrow f'(0) = 6 \Rightarrow \boxed{c = 6}$

Sustituyendo en (*) tenemos que $3a - 0 + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$

Por tanto, la función buscada es $f(x) = -2x^3 + 6x + 3$