Me proponía evitar las difíciles y aburridas operaciones de cálculo, cuyo fastidio constituye una pesadilla para muchos que se dedican al estudio de las matemáticas.

John Napier. Matemático escocés inventor de los logaritmos (1550-1617)

4º de ESO (académicas). Examen de números. 15.12.2017

2. (3 puntos) Simplifica las siguientes expresiones y expresa el resultado de todas las formas que sepas:

$$\mathbf{a)}\ \sqrt{\mathbf{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}\cdot\sqrt[4]{\mathbf{27}} = 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}} = 3^{\frac{6-4+9}{12}} = 3^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{3^{11}}$$

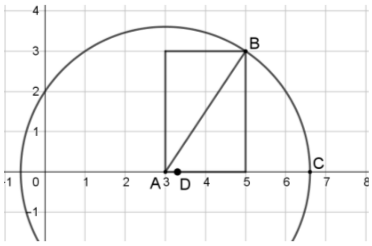
$$\mathbf{b)}\ \sqrt{\mathbf{5}}+\sqrt{\mathbf{20}}+\sqrt{\mathbf{45}} = \sqrt{5}+\sqrt{2^2\cdot 5}+\sqrt{3^2\cdot 5} = \sqrt{5}+2\sqrt{5}+3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\mathbf{c)}\ \left(\frac{\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{18}}}{\mathbf{6}}\right)^{\mathbf{2}} = \left(\frac{3+3\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1+2+2\sqrt{2}}{4} = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$$

3. (2 puntos) Racionaliza, simplifica y representa geométricamente:

$$\frac{2}{\sqrt{13}-3} = \frac{2\left(\sqrt{13}+3\right)}{\left(\sqrt{13}-3\right)\left(\sqrt{13}+3\right)} = \frac{2\left(\sqrt{13}+3\right)}{13-9} = \frac{2\left(\sqrt{13}+3\right)}{4} = \frac{\sqrt{13}+3}{2}$$

Representación: como $13 = 3^2+2^2, \sqrt{13}$ es la longitud de la diagonal de un rectángulo 3x2.



Por tanto, $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{13} \Rightarrow C = 3+\sqrt{13}$

Si D es el punto medio entre el origen y C, valdrá

$$\frac{\sqrt{13}+3}{2}$$

4. (1 punto) Calcula, utilizando la definición y las propiedades de los logaritmos:

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt[3]{4}}{8} = \frac{\log_2\frac{\sqrt[3]{4}}{8}}{\log_2\sqrt{2}} = \frac{\log_2\sqrt[3]{4}-\log_2 8}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{2}{3}-3}{3} = \frac{-\frac{7}{3}}{3} = -\frac{7}{9}$$

Otra forma:

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt[3]{4}}{8} = x \Rightarrow \sqrt{2}^{x} = \frac{\sqrt[3]{4}}{8} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{2}{3}-3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{-7}{3} \Rightarrow x = -\frac{7}{9}$$

5. (1,5 puntos) Una gallina cacareando emite un sonido de 40 dB. ¿Cuántos decibelios habrá en un corral en el que cacarean simultáneamente 23 gallinas? (el número 23 ha sido escogido al azar).

Si llamamos A a la intensidad del sonido de una gallina, la de 23 gallinas será 23A;

$$40\ \mathrm{dB} = 4\mathrm{B} = \log \mathrm{A} \Rightarrow \log(23\mathrm{A}) = \log 23 + \log \mathrm{A} = 1{,}4 + 4 = 5{,}4\ \text{belios} = 54\ \mathrm{dB}$$

6. (1,5 puntos) La extensión del humedal de Velilla de San Antonio (Madrid), que actualmente es de 45 Ha, disminuye a un ritmo del 0,5% anual. De continuar así ¿Qué extensión tendrá a finales del siglo?

Al disminuir un 0,5% anual, su extensión se multiplicará cada año por 0,995, por tanto la extensión dentro de 83 años será $45 \cdot 0{,}995^{83} \cong 30$ Ha.

¿Cuánto tardará en medir menos de 20 Ha?

Si llamamos n al número de años que tienen que pasar para que la extensión sea de 20 Ha,

$$45 \cdot 0{,}995^{\mathrm{n}} = 20 \Rightarrow 0{,}995^{\mathrm{n}} = \frac{20}{45} \Rightarrow 0{,}995^{\mathrm{n}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \mathrm{n} = \log_{0{,}995}\frac{4}{9} = \frac{\log 4 - \log 9}{\log 0{,}995} \cong 162 \text{ años}$$

Problema + (se evalúa aparte y no baja la nota): En los últimos 40 años, los humedales españoles ha perdido un 60% de su extensión. ¿Cuál ha sido la disminución media anual?

Llamemos x a la tasa media de disminución anual. Se tiene:

$$100 \cdot \mathrm{x}^{40} = 40 \Rightarrow \mathrm{x}^{40} = 0{,}4 \Rightarrow \mathrm{x} = \sqrt[40]{0{,}4} \cong 0{,}98$$

Esto quiere decir que la extensión se ha multiplicado cada año por 0,98 cada año; por tanto cada año han perdido el 2%