Quien sabe que es profundo se esfuerza por ser claro, quien quiere parecer profundo se esfuerza en ser oscuro. F. Nietzsche. Filósofo alemán (1844-1900).

Matemáticas I. Examen de números y sucesiones. 25.10.2018.

1. (1 punto) Sea x un número irracional. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas, falsas o dependen del valor de x:

$$\mathbf{a)\ x + \frac{1}{3}\ \ es\ irracional}$$

Cierto siempre, pues si fuese racional se tendría que

$$\mathbf{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \text{ con a, b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} - \frac{1}{3} = \frac{3\mathrm{a}-\mathrm{b}}{3\mathrm{b}} \epsilon\mathbb{Q}, \text{lo cual contradice que x es irracional}$$

$$\mathbf{b)\ x^2\ \ es\ irracional}$$

Depende del valor de x: $\sqrt{2}$ es irracional y $\sqrt{2}^2 = 2$ es racional, pero $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es irracional y su cuadrado, $(3+\sqrt{5})/2$, también lo es.

2. (1 punto) Comprueba que

$$\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{6}}}$$

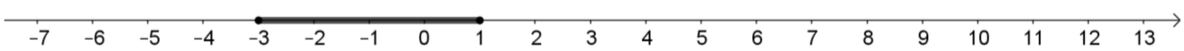
$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2-\sqrt{3};\ \left(\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{9+3-6\sqrt{3}}{6} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$$

Al ser ambos positivos y coincidir sus cuadrados queda demostrado que son iguales.

3. (2 puntos) Expresa en forma de intervalo y representa los siguientes conjuntos de números reales:

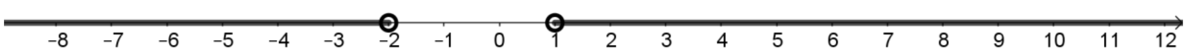
$$\mathbf{a)\ \{x \in \mathbb{R}: |2+x| \leq 1\}}$$

$$|2+\mathrm{x}| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2+\mathrm{x} \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \mathrm{x} \leq -1 \Leftrightarrow \mathrm{x}\epsilon[-3,-1]$$



$$\mathbf{b)\ \{x \in \mathbb{R}: |2x-1| > 3\}}$$

$$|2\mathrm{x}-1| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathrm{x}+1 > 3 \Leftrightarrow \mathrm{x} > 1 \\ \text{ó} \\ 2\mathrm{x}+1 < -3 \Leftrightarrow \mathrm{x} < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{x} \in]-\infty,-2[\ \cup\ ]1,\infty[$$



4. (2 puntos) Al final

5. (3 puntos) Sea la sucesión

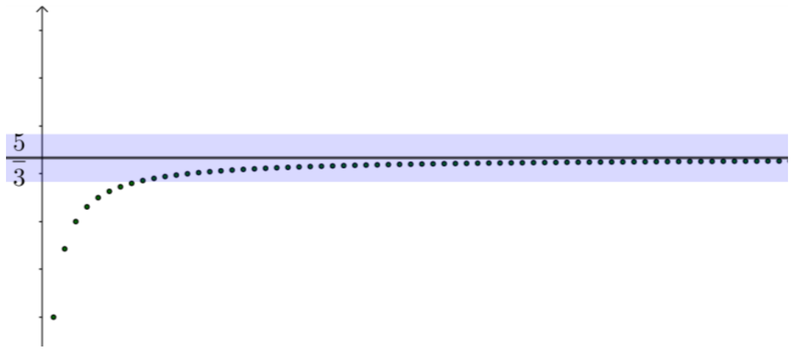
$$\mathbf{a_n = \frac{5n-1}{3n+1}}$$

a) Justifica que es convergente y calcula el término a partir del cual todos los siguientes distan del límite menos de una centésima. Haz un dibujo explicativo.

$$\lim \frac{5n-1}{3n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{5-\frac{1}{\infty}}{3+\frac{1}{\infty}} = \frac{5-0}{3+0} = \frac{5}{3}$$

$$\left|\frac{5n-1}{3n+1} - \frac{5}{3}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{15n-3-15n-5}{3(3n+1)}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{-8}{3(3n+1)}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3(3n+1)} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{3(3n+1)}{8} > 100 \Leftrightarrow n > \frac{797}{9} \Leftrightarrow n \geq 89$$



Si la semianchura de la franja es de una centésima, a_{89} y todos los siguientes ya quedan dentro de esa franja

b) Estudia si es monótona.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5(n+1)-1}{3(n+1)+1} - \frac{5n-1}{3n+1} = \frac{5n+4}{3n+4} - \frac{5n-1}{3n+1} = \frac{(5n+4)(3n+1)-(5n-1)(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)} =$$

$$= \frac{8}{(3n+4)(3n+1)} > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{es estrictamente creciente}$$

6. (1 punto) Una inversión tiene un tipo nominal del 15% anual. ¿Cuál será su tasa anual equivalente (TAE) si los intereses se abonasen mensualmente? ¿Y si se agregasen de forma continua?

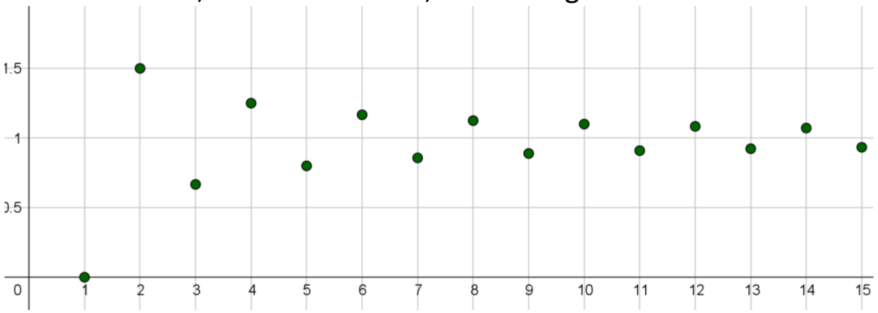
Si los intereses se abonasen mensualmente, el tanto por uno mensual sería 0,15:12=0,0125. Por tanto un euro se transformaría en $1{,}0125^{12} = 1{,}1607\ldots \approx 1{,}161$ ⇒16,1% de TAE

Si se agregasen de forma continua, el número de periodos (n) tendería a ∞, con lo cual 1 euro se transformaría en

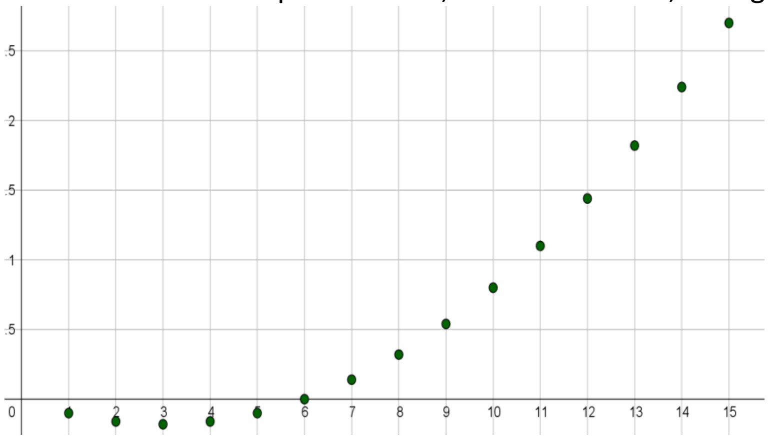
$$\lim\left(1+\frac{0{,}15}{n}\right)^n = e^{0{,}15} = 1{,}1618\ldots \approx 1{,}162 \Rightarrow 16{,}2\%\ \text{TAE}$$

A continuación tienes las gráficas de 4 sucesiones. Indica de cada una de ellas si está acotada, si es monótona, si es divergente o si es convergente.

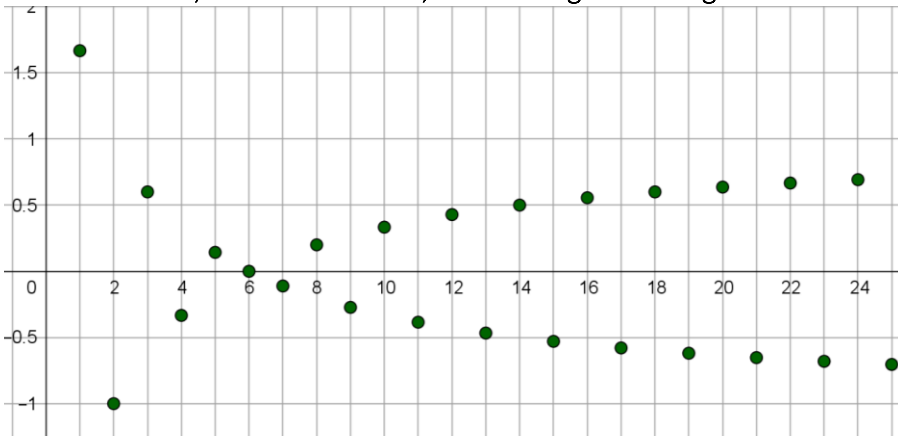
A Está acotada, no es monótona, es convergente



B No está acotada superiormente, no es monótona, diverge



C Está acotada, no es monótona, no converge ni diverge.



D Está acotada, es monótona creciente, converge