El álgebra es sólo la geometría escrita y la geometría el álgebra imaginada.

Marie-Sophie Germain (1776 -1831). Matemática francesa.

Matemáticas II. Examen de Geometría analítica. 19.12.2018

1. (1 punto) Define el producto vectorial y justifica por qué es perpendicular a cada uno de sus factores.

2. (3 puntos) Dados los puntos $\mathbf{A(0,0,2)}$, $\mathbf{B(0,1,-1)}$, $\mathbf{C(m,1,0)}$ y $\mathbf{D(2,0,1)}$, se pide:

a) Calcular $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ para que sean coplanarios.

A, B, C y D son coplanarios $\Leftrightarrow$ lo son los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ rango($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$)$< 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ m & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

b) Calcular $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ para que formen un tetraedro de volumen 1.

$$1 = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| \Rightarrow 1 = \frac{1}{6}|m+2| \Rightarrow m + 2 = \pm 6 \Rightarrow m = -2 \pm 6$$

c) Calcular $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ para que $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ sean perpendiculares.

$\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son perpendiculares$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

d) Calcular $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ para que $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ formen un ángulo de 45°

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}\right) = 45° \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos 45° \Rightarrow 2m + 2 = \sqrt{m^2+5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 = \frac{5m^2+25}{2} \Rightarrow 3m^2 + 16m - 17 = 0 \Rightarrow m = \frac{-16 \pm \sqrt{460}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{115}}{3}$$

3. (3 puntos) Sea la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{2x - y = 1} \\ \mathbf{x + y + z = 6} \end{cases}$ y el punto $\mathbf{P(2,2,5)}$. Se pide:

a) Halla su distancia.

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{PP_r} \times d_r\right|}{|d_r|};\ d_r = n_1 \times n_2 = (2,-1,0) \times (1,1,1) = (-1,-2,3);$$

Para buscar $P_r \in r$ hacemos por ejemplo $x = 0 \Rightarrow P_r = (0,-1,7) \Rightarrow \overrightarrow{PP_r} = (-2,-3,2) \Rightarrow$

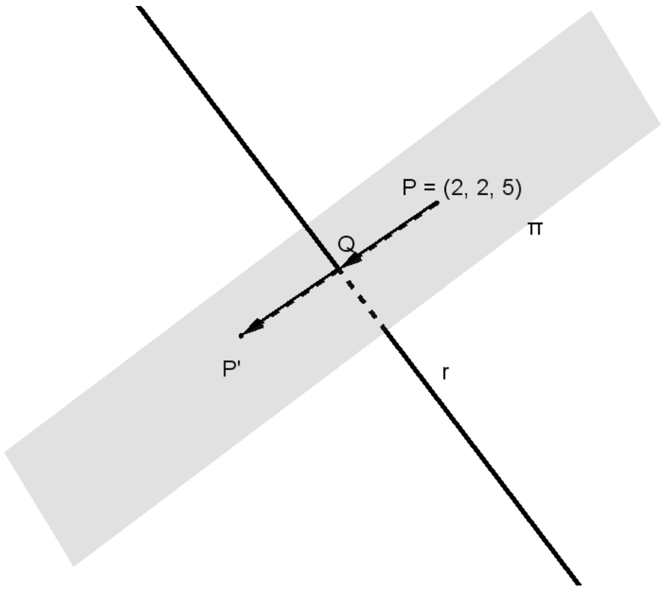
$$\Rightarrow \overrightarrow{PP_r} \times d_r = (-2,-3,2) \times (-1,-2,3) = (-5,4,1) \Rightarrow d = \frac{|(-5,4,1)|}{|(-1,-2,3)|} = \sqrt{\frac{42}{14}} = \sqrt{3}$$

b) Encuentra la proyección ortogonal de P sobre r.

Encontramos primero la ecuación de un plano π perpendicular a r que pase por P; este plano tendrá por vector normal al vector director de r, $d_r = (-1, -2, 3)$, por lo que su ecuación será

$x + 2y - 3z = D$. Para que π pase por P ha de ser $D = -9 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y - 3z = -9$

La proyección buscada, a la que llamaremos Q, es la intersección de π con r. Para hallarla expresamos r en paramétricas y sustituimos en la ecuación de π.



$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 7 - 3t \end{cases} ; \quad t + 2(-1 + 2t) - 3(7 - 3t) = -9 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow Q = (1,1,4)$$

c) Halla el punto simétrico de P respecto a r.

El simétrico es $P' = (a, b, c)$; Como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow (1,1,1) = (a - 1, b - 1, c - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2, b = 2, c = 5 \Rightarrow Q = (2,2,5)$

4. (3 puntos) Estudia la posición relativa de los planos π_1, π_2, π_3 según los valores de a $\in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi_1} &\equiv \mathbf{ax + y - z = 0} \\ \boldsymbol{\pi_2} &\equiv \mathbf{x - y + az = 2} \\ \boldsymbol{\pi_3} &\equiv \mathbf{-x - ay + z = -2} \end{aligned}$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes M y su ampliada $\overline{M}$ para ver las posibles intersecciones:

$|M| = a^3 - a$; $|M| = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = \pm 1$

Por tanto, cuando $a \neq 0, a \neq \pm 1$ los rangos de M y $\overline{M}$ valen 3 y el sistema de ecuaciones es compatible determinado. Eso quiere decir que los tres planos se cortan en un punto.

Estudiamos los otros 3 casos:

$$a = 0: \begin{array}{l} \pi_1 \equiv y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv x - y = 2 \\ \pi_3 \equiv -x + z = -2 \end{array}$$; no hay planos paralelos ni coincidentes; estudiamos los rangos:

$$\text{rg}\, \overline{M} = \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = 2$$, pues las filas 1ª y 3ª son proporcionales. Eso quiere decir que el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad, es decir, que los planos tienen una recta en común (están en haz)

$$a = 1: \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv x - y + z = 2 \\ \pi_3 \equiv -x - y + z = -2 \end{array}$$; se ve claramente que $\pi_1 \parallel \pi_3$ y secantes a π_2

$$a = -1: \begin{array}{l} \pi_1 \equiv -x + y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \\ \pi_3 \equiv -x + y + z = -2 \end{array}$$; se ve claramente que $\pi_2 = \pi_3$ y secantes a π_1