Tiene mucho talento, pero no es geómetra; lo cual como usted sabe es un gran defecto.
Carta de Blaise Pascal a Pierre Fermat, sobre el cabalero De Méré.

Matemáticas I. Examen de geometría analítica. 07.06.2018.

1. Dados los vectores $\vec{a} = (-1, 3), \vec{b} = (x, 2)$, calcula $x \in \mathbb{R}$ para que

a) Tengan la misma dirección

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x}{-1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

b) Sean perpendiculares

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot x + 3 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

c) Formen un ángulo de $30°$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 30° \Rightarrow 6 - x = \sqrt{10} \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 36 + x^2 - 12x = \frac{15}{2}(x^2 + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x^2 + 24x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 + 4 \cdot 12 \cdot 13}}{26} = \frac{-12 \pm 10\sqrt{3}}{13}$$

d) El módulo de $\vec{b}$ sea el doble que el de $\vec{a}$

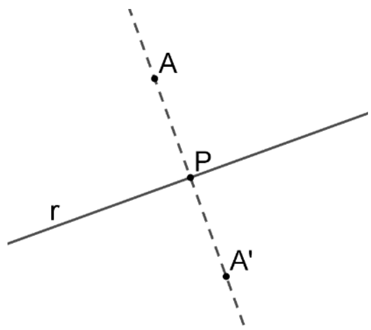
$$|\vec{b}| = 2|\vec{a}| \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{10} \Rightarrow x^2 + 4 = 40 \Rightarrow x = \pm 6$$

2. Sean la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t - 3 \end{cases}$ y el punto $A(0, -1)$

a) Escribe la ecuación continua, general y explícita de una recta s paralela a r que pase por A.

$$\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{d_r} = (-1, 2) \Rightarrow s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2}; \quad 2x + y + 1 = 0; \quad y = -2x - 1$$

b) Halla la proyección de A sobre r.



Recta perpendicular a r que pasa por A: $x - 2y = 2$; La proyección es la intersección de esta recta con r; la calculamos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas (o sustituyendo las paramétricas de r en la recta perpendicular por A):

$$2 - t - 2(2t - 3) = 2 \Rightarrow t = \frac{6}{5} \Rightarrow P = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

c) Encuentra el punto simétrico de A respecto de r.

Si llamamos A'(a,b) al simétrico,

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA'} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} + 1\right) = \left(a - \frac{4}{5}, b + \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

d) Encuentra todos los puntos de r que disten de A el doble de lo que dista A de r.

Calculamos primero la distancia de A a r, cuya ecuación general es $2x + y - 1 = 0$:

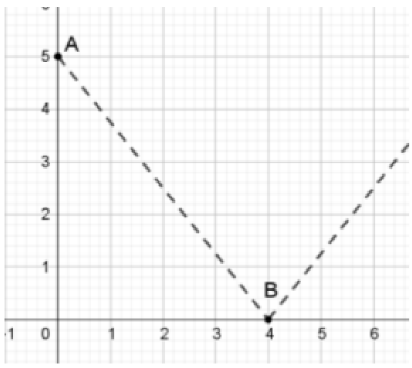
$$d(A,r) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Sea $Q(2 - t, 2t - 3)$ uno de los puntos buscados.

$$d(Q,A) = 2d(A,r) \Rightarrow \sqrt{(2-t)^2 + (2t-2)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow 4 + t^2 - 4t + 4t^2 + 4 - 8t = \frac{16}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25t^2 - 60t + 24 = 0 \Rightarrow t = \frac{60 \pm \sqrt{3600 - 2400}}{50} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{5} \Rightarrow Q = \left(\frac{4 \mp 2\sqrt{3}}{5}, \frac{-3 \pm 4\sqrt{3}}{5}\right)$$

3. Del punto A parte un rayo que incide sobre el eje OX en el punto B. Halla la ecuación de la trayectoria de la onda incidente y de la reflejada. ¿Pasará ésta última por el punto (20,20)?



Obtenemos la ecuación de AB:

$\overrightarrow{AB} = (4, -5) \Rightarrow r \equiv 5x + 4y = 20 \Rightarrow m_r = -\frac{5}{4}$

La recta reflejada, s, tendrá pendiente opuesta a la de r y pasará por B, luego su ecuación será

$y = \frac{5}{4}(x - 4)$

El punto (20, 20) verifica dicha ecuación, por lo tanto la recta reflejada sí pasa por él.