Nos quedan refugios: la creación y, sobre todo, el aprendizaje. Aprender nos hace crecer en lugar de envejecer.
Ariel Rot. Guitarrista y cantante.

Matemáticas I. Examen de Análisis. 05.02.2018

1. Halla el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2-4}}$

$\mathrm{Dom(f)}=\{x\in\mathbb{R} : x^2-4\geq 0\}=]-\infty,-2]\cup[2,\infty[$

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$, no hay asíntotas horizontales. Tampoco hay verticales. Pero sí oblicuas:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}}=1;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}=0$$

Por tanto, $y=x$ es una asíntota oblicua por la derecha. Al ser la función simétrica par, por la izquierda tendrá como asíntota la recta $y=-x$

b) $\mathbf{f(x)=\dfrac{3}{e^x+1}}$;

$\mathrm{Dom(f)}=\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{e^x+1}=\frac{3}{\infty+1}=0\Rightarrow y=0 \text{ es asíntota horizontal por la derecha;}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{e^x+1}=\frac{3}{0+1}=3\Rightarrow y=3 \text{ es asíntota horizontal por la izquierda; no hay oblícuas.}$$

c) $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{\ln x}}$; $\exists \ln x\Leftrightarrow x>0;\ \ln x=0\Leftrightarrow x=1;$ por tanto, $\mathrm{Dom(f)}=(0,1)\cup(1,\infty)$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{-\infty}=0;\quad \lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{0}=\pm\infty\Rightarrow \text{A. vertical en } x=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow y=0 \text{ es una asíntota horizontal por la derecha.}$$

2. **Halla los extremos relativos y las inflexiones de** $\mathbf{f(x)=e^{x^2}}$

$$f'(x)=2x\cdot e^{x^2};\quad f''(x)=2e^{x^2}+2x\cdot e^{x^2}\cdot 2x=2e^{x^2}(1+2x^2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0; f''(0)>0\Rightarrow \text{mínimo en } \big(0,f(0)\big)=(0,1)$$

$f''(x)=0\Rightarrow 1+2x^2=0$; como no tiene solución, no hay inflexiones.

3. **Estudia la continuidad y la derivabilidad de f(x)**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1-\sqrt{5-4x}} & \mathbf{si\ x<1} \\ \mathbf{\ln(2x-1)} & \mathbf{si\ x \geq 1} \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{5-4x}} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2}{2x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Posible discontinuidad/punto anguloso: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(1-\sqrt{5-4x}\right) = 0;\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln(2x-1) = 0 \Rightarrow \text{continua en } x = 1$$

$$f'_-(1) = \frac{2}{\sqrt{5-4}} = 2;\ f'_+(1) = \frac{2}{2-1} = 2 \Rightarrow \text{derivable en } x = 1$$

4. Hemos observado que la temperatura en °C de un alimento, en función del tiempo que lleva en la nevera, viene dada por la fórmula $\mathbf{T(t) = 5 + 80 \cdot e^{-0{,}05t}}$, donde t se mide en minutos.

a) ¿Cuál era su temperatura cuando se metió en la nevera? $T(0) = 5 + 80 = 85$ **(0,5 puntos)**

b) ¿Cuánto tiempo tendrá que permanecer el alimento en la nevera para que su temperatura alcance los 20 grados? (1 punto)

$$5 + 80 \cdot e^{-0{,}05t} = 20 \Rightarrow e^{-0{,}05t} = \frac{15}{80} \Rightarrow -0{,}05t = \ln\frac{3}{16} \Rightarrow t = \frac{\ln 3 - \ln 16}{-0{,}05} \cong 33\text{minutos}$$

c) ¿Qué temperatura hay en el interior de la nevera? $\lim_{t\to\infty} T(t) = 5 + 80 \cdot 0 = 5$ **(0,5 puntos)**

5. Una gallina cacareando emite un sonido de 65 dB. ¿Cuántas gallinas hay cacareando al mismo tiempo si el sonido del gallinero alcanza los 80 dB?

Si llamamos G a la intensidad del sonido de una gallina, y x al número de gallinas que emiten conjuntamente 80 dB, se tiene que

$$6{,}5 = \log G; 8 = \log(Gx) \Rightarrow 8 = \log G + \log x \Rightarrow 8 = 6{,}5 + \log x \Rightarrow \log x = 1{,}5 \Rightarrow x = 10^{1{,}5} \cong 32$$

6. (1 punto) A partir de la gráfica de la función f calcula razonadamente:

$\mathbf{a)}\ \lim_{x\to\infty} \mathbf{f'(x)} = 1$
ya que es la pendiente de la asíntota a la que se aproxima la curva

$\mathbf{b)}\ \lim_{x\to-\infty} \mathbf{f'(x)} = 0$
ya que es la pendiente de la asíntota a la que se aproxima la curva

$\mathbf{c)}\ \lim_{x\to-1^-} \mathbf{f'(x)} = \infty$
ya que la pendiente se va haciendo cada vez mayor y la tengente tiende a ponerse vertical