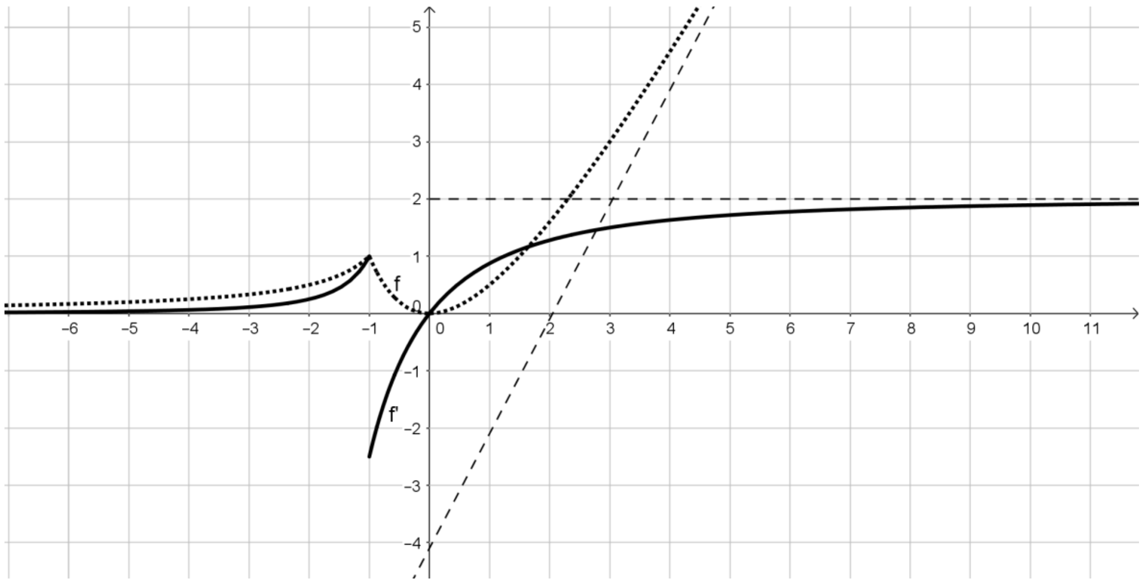
Matemáticas I. Examen de derivadas resuelto. 16.06.2017

1. Esboza la gráfica de la función derivada de la curva del gráfico:



A la izquierda de x=-1 la derivada es claramente positiva; en x=-1 cambia bruscamente la pendiente (no derivable) y a la derecha es positiva. En x=0 la tangente es horizontal (derivada 0); cuando $x \to \infty$, la pendiente de la tangente tiende a la pendiente de su asíntota, que es 2. Cuando $x \to -\infty$, la tangente tiende a ponerse horizontal, por lo que la derivada tiende a 0.

2. Calcula $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función sea derivable.

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{a + e^{bx}} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{\dfrac{4}{\sqrt[3]{x+8}} = 4(x+8)^{-1/3}} & \mathbf{si\ x \geq 0} \end{cases}$$

Continuidad: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1;$

Derivabilidad: $f'^{(x)} = \begin{cases} be^{bx} & si\ x < 0 \\ \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(x+8)^4}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$; $f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow b = -\dfrac{1}{12}$

3. Halla la ecuación de la recta tangente y normal a cada curva en el punto cuya abscisa se indica:

a) $\mathbf{f(x) = \dfrac{log(x-1)}{x^2}}$ **en $\mathbf{x = 2}$**; $f(2) = 0$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x^2}{(x-1)\ln 10} - 2x\log(x-1)}{x^4} = \frac{x - 2(x-1)\ln 10 \log(x-1)}{(x-1)x^3 \ln 10} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{4\ln 10}$$

Recta tangente: $y = \dfrac{1}{4\ln 10}(x-2)$; recta normal: $y = -4\ln 10(x-2)$

$\mathbf{b)} \mathbf{g(x) = \sqrt{x^2+3}}$ **en** $\mathbf{x = -1}$

$$g(-1) = 2; \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow g'(-1) = -\frac{1}{2}$$

Recta tangente: $y - 2 = 2(x+1)$; recta normal: $y - 2 = 2(x+1)$

c) $\mathbf{h(x) = x \cdot sen\, x}$ **en** $\mathbf{x = \frac{\pi}{2}}$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; \quad h'(x) = sen\, x + x\cos x \Rightarrow h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Recta tangente: $y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = x$; recta normal: $y - \frac{\pi}{2} = -x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \pi - x$

4. Estudia y representa la función $\mathbf{f(x) = x^3 - 12x + 11}$ indicando con claridad las coordenadas de sus extremos relativos, inflexiones y cortes con los ejes de coordenadas

No es simétrica ni tiene asíntotas; cortes con los ejes:

$$x = 0 \Rightarrow y = 11; \ y = 0 \Rightarrow x^3 - 12x + 11 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12; \quad f''(x) = 6x; \quad f'''(x) = 6;$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2; f''(2) > 0 \Rightarrow \text{mín en } (2, -5); \ \ f''(-2) < 0 \Rightarrow \text{máx en } (-2, 27)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0; f''(x) < 0 \text{ si } x < 0 \text{ (convexa)}, f''(x) > 0 \text{ si } x > 0 \text{ (cóncava)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{inflexión en } (0, 11)$$