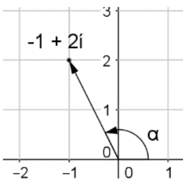
Incluso en el desenfreno tiene que haber precisión.

Gustavo Dudamel. Director de orquesta venezolano nacido en 1981

Matemáticas I. Examen de trigonometría y números complejos. 26.01.2017

1. Sea $\mathbf{z = -1 + 2i}$

a) Represéntalo y calcula su módulo y las razones trigonométricas de su argumento, $\boldsymbol{\alpha}$



$$|-1+2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = -2$$

b) Halla tg $\mathbf{(\alpha + 45°)}$, $\mathbf{\cos(2\alpha)}$ y $\mathbf{sen(2\alpha)}$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45°) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}45°}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}45°} = \frac{-2+1}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$$

c) Calcula $\mathbf{z^2}$ de dos formas distintas expresando el resultado en forma binómica.

$$z^2 = \left(\sqrt{5}_\alpha\right)^2 = 5_{2\alpha} = 5(\cos 2\alpha + i\operatorname{sen}2\alpha) = 5\left(-\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right) = -3 - 4i$$

$$z^2 = (-1+2i)^2 = 1 + 4i^2 - 4i = 1 - 4 - 4i = -3 - 4i$$

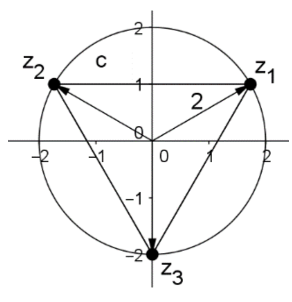
d) Halla x$\in \mathbb{R}$ para que $\mathbf{\dfrac{x-i}{z}}$ sea imaginario puro

$$\frac{x-i}{-1+2i} = \frac{(x-i)(1+2i)}{(-1+2i)(1+2i)} = \frac{x+2+i(2x-1)}{4i^2-1} = \frac{x+2+i(2x-1)}{-5} \in \mathbb{R}i \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

e) Halla x$\in \mathbb{R}$ para que $\mathbf{z(2 + xi)}$ tenga su afijo en la bisectriz del 2º y 4º cuadrante (B$_2$)

$$(-1+2i)(2+xi) = (-2-2x) + (4-x)i \in B_2 \Leftrightarrow \frac{4-x}{-2-2x} = -1 \Leftrightarrow 4 - x = 2 + 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

2. Calcula y representa todas las soluciones complejas de la ecuación $\mathbf{x^3 - 8i = 0}$ (Expresa dos de ellas también en forma binómica).



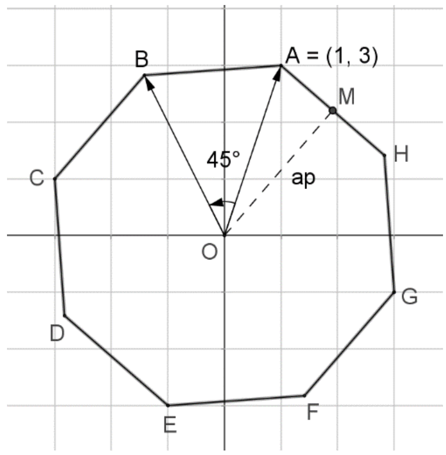
$$x^3 = 8i \Rightarrow x^3 = 8_{90°} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{\frac{90°+k360°}{3}} = 2_{30°+k120°} = \begin{cases} 2_{30°} = \sqrt{3} + i \\ 2_{150°} - \sqrt{3} + i \\ 2_{270°} = -2i \end{cases}$$

3. a) Halla las coordenadas del vértice B del octógono regular representado

B es el afijo del número complejo obtenido al girar A 45° o, lo que es lo mismo, multiplicar A por $1_{45°}$

$$(1+3\mathrm{i})\cdot 1_{45°} = (1+3\mathrm{i})\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-2+4\mathrm{i}) = -\sqrt{2}+2\sqrt{2}\mathrm{i}$$

Por tanto, $\mathrm{B} = \left(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$



b) Calcula su perímetro y su área.

Como $\mathrm{OA} = |1+3\mathrm{i}| = \sqrt{10}$, si llamamos a al lado $(\overline{\mathrm{AB}})$, por el teorema del coseno se tiene

$$\mathrm{a}^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 - 2\sqrt{10}^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 - 10\sqrt{2} \Rightarrow \mathrm{p} = 8\sqrt{10(2-\sqrt{2})}$$

Por otro lado,

$$\cos\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\mathrm{ap}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \mathrm{ap} = \frac{\sqrt{10(2+\sqrt{2})}}{2}$$

Por tanto, el área será

$$\frac{1}{2}\mathrm{p}\cdot\mathrm{ap} = \frac{1}{2}8\sqrt{10\left(2+\sqrt{2}\right)}\frac{\sqrt{10\left(2+\sqrt{2}\right)}}{2} = 20\left(2+\sqrt{2}\right)$$