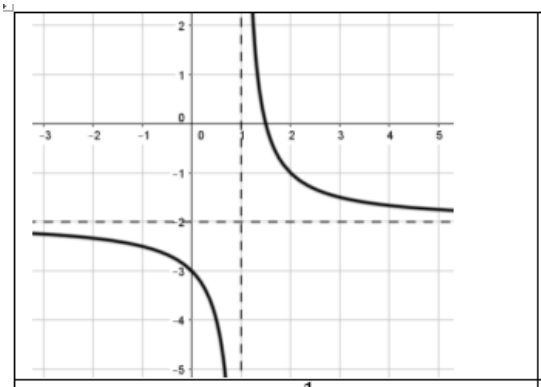
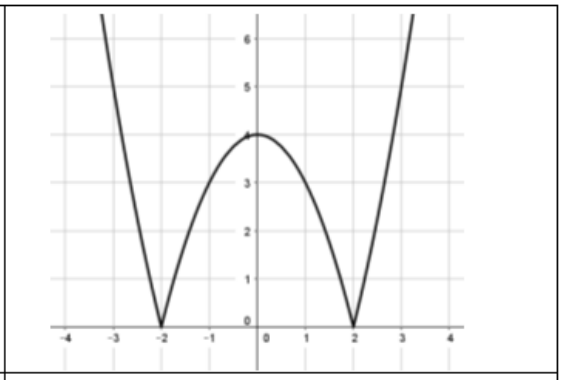
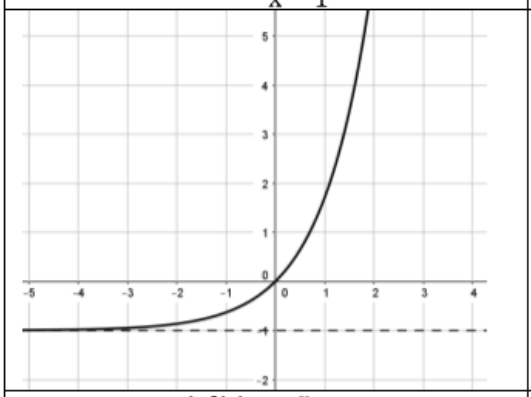
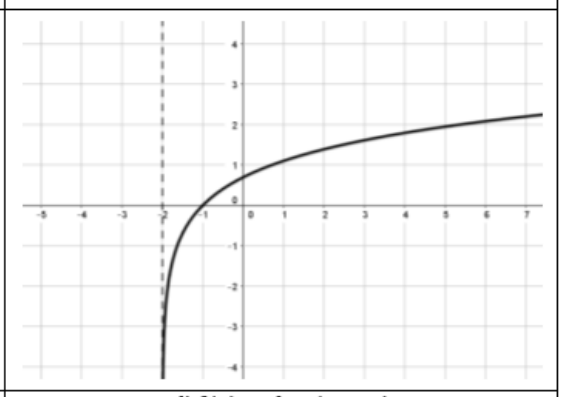
Matemáticas I. Examen de Análisis. 26.05.2017

1. (2 puntos) Asocia a cada gráfica su fórmula su expresión algebraica

	
a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - 2$	b) $f(x) = \lvert x^2 - 4 \rvert$
	
c) $f(x) = e^x - 1$	d) $f(x) = \log(x+2)$

2. (2 puntos) Encuentra todas las asíntotas de cada función

a) $\mathbf{f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = 1$ es una asíntota vertical;

$\dfrac{2x^2}{x-1} = 2x + 2 + \dfrac{2}{x-1} \Rightarrow y = 2x + 2$ es una asíntota oblicua

b) $\mathbf{g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}}$; $x^2 + 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ no hay asíntotas verticales

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 \Rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

3. (3 puntos) Estudia la continuidad de las siguientes funciones

a) $\mathbf{f(x) = \dfrac{x-1}{1-x^2}}$; $\nexists f(\pm 1) \Rightarrow$ f es discontinua en ambos puntos.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{-2}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ discontinuidad de salto infinito en $x = -1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{discontinuidad evitable en } x = 1$$

b) $\mathbf{g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$; $\nexists f(0)$ y $\nexists \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$ discontinuidad de segunda especie en $x = 0$

c) $\mathbf{h(x) = \begin{cases} 2^x - 4 & \text{si } x \le 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}}$;

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} (2^x - 4) = 0 = h(2);\ \lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^-} \ln(x-1) = 0 \Rightarrow \text{h es continua}$$

4. (1 punto) Halla el dominio de $\mathbf{f(x) = \sqrt{3x-5}}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 5 \ge 0\} = \left[\frac{5}{3}, \infty\right[$$

5. (1 punto) Indica razonadamente si alguna de las siguientes funciones tiene simetría:

a) $\mathbf{f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}}$; $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x) \Rightarrow$ impar

b) $\mathbf{g(x) = sen\left(x^3\right)}$; $g(-x) = \mathrm{sen}((-x)^3) = \mathrm{sen}(-x^3) = -\mathrm{sen}(x^3) = -g(x) \Rightarrow$ impar

6. (1 punto) Halla $\mathbf{f \circ g}$ y $\mathbf{g \circ f}$ siendo

$$f(x) = \frac{x}{2x-1} \quad g(x) = x^2 + 3;\ (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2+3) = \frac{x^2+3}{2(x^2+3)-1} = \frac{x^2+3}{2x^2+5}$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{x}{2x-1}\right) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 + 3 = \frac{13x^2 - 12x + 3}{(2x-1)^2}$$