En el otoño de 1972 el presidente Nixon anunció que el ritmo de inflación estaba disminuyendo. Fue la primera vez que un presidente de Estados Unidos utilizó la tercera derivada para promocionar su reelección.

Hugo Rossi. Matemático estadounidense nacido en 1935.

Matemáticas II. Examen de Análisis (1). 20.02.2018

1. **(3 puntos)**

a) Enuncia el teorema de Bolzano e interprétalo geométricamente. (2 x 0,75 puntos)

Si una función f(x) es continua en un intervalo

b) Demuestra que la gráfica de la función $\mathbf{y = -\cos x}$ corta a la bisectriz del primer cuadrante.

Como la ecuación de la bisectriz del primer cuadrante es $y = x$, probar que corta a la función equivale a demostrar que la ecuación $x + \cos x = 0$ tiene solución.

Sea $f(x) = x + \cos x$; f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de dos funciones continuas; además

$$f(0) = \cos 0 = 1 > 0; \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

Por tanto, en virtud del teorema de Bolzano, existe un $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) : f(c) = 0$

2. (1,5 puntos) Explica qué es la derivada de una función en un punto geométrica y analíticamente.

3. (1,5 puntos) Halla el valor del parámetro a$\in \mathbb{R}$ para que el teorema de Weierstraß sea aplicable a la función $\mathbf{y = f(x)}$ en el intervalo $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \sqrt[x]{\mathbf{2}} & \mathbf{si\ x} < 0 \\ \mathbf{a} & \mathbf{si\ x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Para que dicho teorema sea aplicable, la función debe ser continua en el intervalo, y para ello ha de suceder que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = a$

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt[x]{2} = \lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0$$

Por tanto, a debe valer 0.

4. (4 puntos) Estudia la continuidad y encuentra todas las asíntotas de las funciones:

a) $\mathbf{f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}}$

El dominio de f es $[0, 4[\cup]4, \infty[$, por lo que la función presenta una discontinuidad en $x = 4$; veamos de qué tipo:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}{(x - 4)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{4 - x}{(x - 4)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{-1}{2 + \sqrt{x}} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, hay una discontinuidad evitable en $x = 4$ **(1 punto)**

No hay asíntotas verticales, pero sí una horizontal por la derecha, $y = 0$, ya que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2 + \sqrt{x}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

Por la izquierda no hay asíntota horizontal ya que el dominio empieza en $x = 0$. **(1 punto)**

$\mathbf{b)}\ \mathbf{g(x)} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{2 - e^{-x}}}$

Veamos dónde se anula el denominador: $2 = e^{-x} \Rightarrow x = -\ln(2)$

Por tanto hay una asíntota vertical en $x = -\ln(2)$, ya que ahí el límite es 4/0, es decir, $\pm\infty$

Estudiamos si hay asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2 + e^{-x}} = \frac{4}{2 + e^{-\infty}} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2 + e^{-x}} = \frac{1}{2 + e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto hay dos asíntotas horizontales, una por la derecha ($y = 2$) y otra por la izquierda ($y = 0$). No hay por tanto asíntotas oblicuas. **(1,5 puntos)**

$$\mathbf{c)}\ \mathbf{h(x)} = \frac{\mathbf{2x^3}}{\mathbf{x^2 + 1}} = \frac{2x^3 + 2x - 2x}{x^2 + 1} = \frac{2x\cancel{(x^2 + 1)}}{\cancel{x^2 + 1}} - \frac{2x}{x^2 + 1} = 2x - \frac{2x}{x^2 + 1} \approx 2x \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

Es una función continua (el denominador no se anula) y sólo tiene una asíntota oblicua, $y = 2x$

(0,5 puntos)