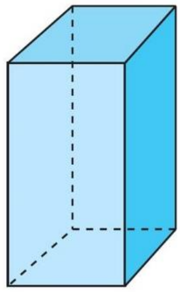
*El razonamiento y el análisis son odiosos para el fanático.*
Pío Baroja y Nessi. Escritor español(1872-1956)

**Matemáticas I. Examen de análisis. 11.12.2017**

**1. (2 puntos) Se quiere diseñar una caja con un volumen de medio litro y forma de prisma recto cuadrado. Encuentra la función que relaciona la superficie de la caja con la longitud de alguna de sus aristas.**



Si llamamos x a la arista básica y h a la altura, ambas en dm,

$$V = x^2h \Rightarrow x^2h = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{1}{2x^2}$$

La superficie de la caja, que está formada por dos bases cuadradas y cuatro paredes rectangulares, es

$$2x^2 + 4xh = 2x^2 + 4x\frac{1}{2x^2} = 2x^2 + \frac{2}{x} = f(x)$$

**2. (1 punto) Calcula la pendiente de la curva y=f(x) en los puntos de abscisa 0 y -2**

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+1) - (x^2+4x)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 4 - x^2 - 4x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2}$$

Por tanto, la pendiente en $x = 0$ será $f'(0) = 4$ y la pendiente en $x = -2$ será $f'(-2) = 4$

**3. (3 puntos) Estudia y representa la función $\mathbf{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}$ indicando las coordenadas de los puntos críticos que tenga (extremos relativos, inflexiones y cortes con los ejes).**

Cortes con OX: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \xRightarrow{\text{Ruffini}} (x-1)(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

Corte con OY: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -4 \Rightarrow$ corta en $(0, -4)$

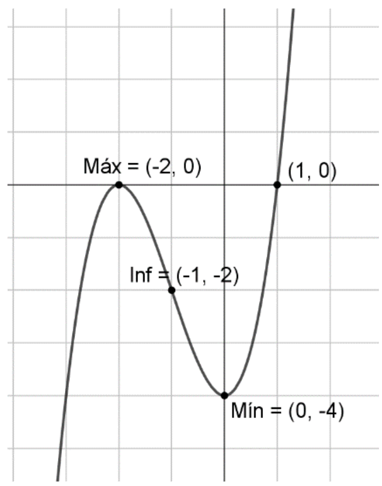
$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2);\quad f''(x) = 6x + 6;$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2;$

$f''(0) > 0 \Rightarrow$mínimo en $(0, -4);$

$f''(-2) < 0 \Rightarrow$máximo en $\left(-2, f(-2)\right) = (-2,0)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$Inflexión en $\left(-1, f(-1)\right) = (-1, -1)$




**4. (2 puntos) Estudia la continuidad y halla todas las asíntotas de las funciones siguientes:**

$$\mathbf{a)\ f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}} = x - 2 + \frac{5}{x + 2}$$

Es discontinua en $x = -2$, ya que $\nexists f(-2)$ y la discontinuidad es de salto infinito, pues

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{5}{0}=\pm\infty$$

Por tanto tiene una asíntota vertical en $x=-2$. Además tiene otra oblicua de ecuación $y=x-2$

**b)** $\mathbf{g(x)=\dfrac{3x^3}{x^3+9x}=\dfrac{3x^3}{x(x^2+9)}}$

Es discontinua en $x=0$, ya que $\nexists g(0)$ y la discontinuidad es evitable, pues

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{3x^3}{x(x^2+9)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\ \frac{3x^2}{x^2+9}=0$$

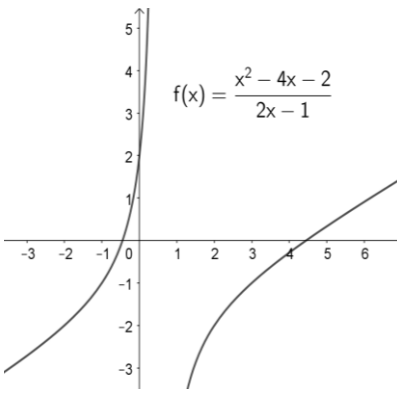
Además tiene una asíntota horizontal en $y=3$ ya que

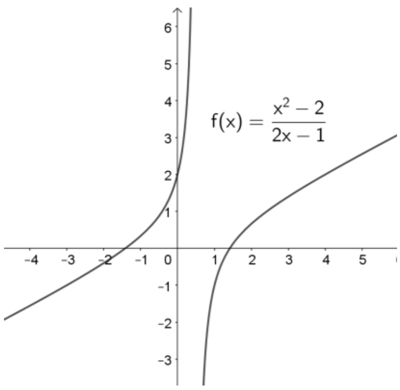
$$\lim_{x\to\infty}\ \frac{3x^3}{x^3+9x}=3$$

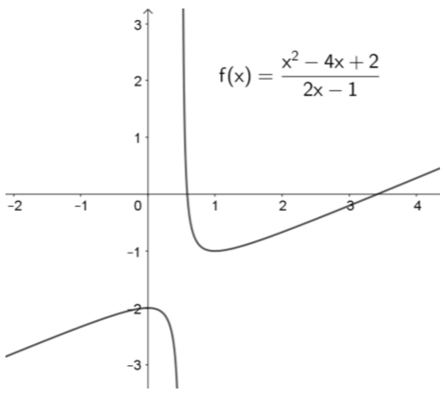
**5. (2 puntos) Relaciona la inecuación con la gráfica de una de las funciones representadas y utiliza la que corresponda para resolverla**

$$\mathbf{\frac{x^2}{2x-1}\geq 2}\Rightarrow\frac{x^2}{2x-1}-2\geq 0\Rightarrow\frac{x^2-2(2x-1)}{2x-1}\geq 0\Rightarrow\frac{x^2-4x+2}{2x-1}\geq 0$$

Por tanto se relaciona con la tercera gráfica.








Para resolver la inecuación tenemos que hallar los cortes con el eje OX y la asíntota vertical.

$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2};\ x^2-4x+2=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$$

Por tanto, la solución de la inecuación es

$$\left]\frac{1}{2},2-\sqrt{2}\right]\cup\left[2+\sqrt{2},\infty\right[$$