El examen tradicional se parece a una confesión forzada en la que el alumno accede a simular que ha comprendido.

Las mentiras se construyen, las verdades se descubren.

Jorge Wagensberg Lubinski. Físico español (1948-2018)

Matemáticas II. Examen de Análisis. 10.04.2018.

1. Enuncia el teorema de Rolle e interprétalo geométricamente.

2. Demuestra que la ecuación $(\mathbf{4-x})\mathbf{e}^{\mathbf{x}} = \mathbf{8}$ tiene exactamente dos soluciones reales.

Consideramos la función $f(x) = (4-x)e^x - 8$; f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, ya que tanto los polinomios como las exponenciales lo son.

$f(0) = 4 - 8 < 0$;

$f(3) = e^3 - 8 > 0$ (pues e>2);

$f(4) = -8 < 0$

$\Rightarrow$ por el teorema de Bolzano podemos afirmar que f se anula en algún a $\in (0,3)$ y en algún b $\in (3,4)$. ***(1 punto)***

Supongamos que tuviera otra raíz más, c. Al ser $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, tendríamos dos intervalos en los que se podría aplicar el teorema de Rolle, por lo que habría dos valores α y β tales que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Pero

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Por tanto no puede existir una tercera raíz ***(1 punto).***

3. Sea la función

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\mathbf{1-x}}-\mathbf{1}}{\sqrt[3]{\mathbf{x}}} & \mathbf{si\ x} < 0 \\ \\ \sqrt[x]{\mathbf{e^x - 1}} & \mathbf{si\ x} > 0 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad

La función es discontinua en $x = 0$, ya que ahí no está definida. Para ver el tipo de discontinuidad que presenta calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}} = 0^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{0}{0}, \text{L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{1-x}} = 0$$

Por tanto la discontinuidad es evitable. ***(1,25 puntos)***

b) Encuentra sus asíntotas, si tiene alguna.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{e^x - 1} = \infty^0$$

(indeterminación); si llamamos A a dicho límite, se tiene:

$$\ln A = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}, \text{L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \Rightarrow A = e$$

Por tanto, la función tiene una asíntota horizontal por la derecha, $y = e$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

Ya que el grado del numerador (1/2) es mayor que el del denominador (1/3), por lo que por la izquierda no hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

Al ser continua no tiene asíntotas verticales. ***(1,25 puntos)***

4. Una lata cilíndrica ha de tener un volumen de 1 litro. Halla sus dimensiones para que el metal empleado en su construcción sea mínimo.

Sea x el radio de la lata en dm. Como el volumen ha de ser de un litro= $1\ \mathrm{dm}^3$, si llamamos h a su altura, se tiene:

$$1 = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{1}{\pi x^2}$$

Queremos minimizar la superficie de la lata, que es

$$f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x} \quad x \in (0, \infty)$$

$$f'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2}; f''(x) = 4\pi + \frac{4}{x^3};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}};\ f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) > 0$$

Por tanto f alcanza un mínimo relativo (que también es absoluto al no haber otros extremos ni discontinuidades en el dominio) en $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

Así pues, el radio de la lata ha de ser $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 1{,}17$ dm y su altura $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1{,}08$ dm

5. Un tren AVE ha tardado tres horas en recorrer los 600 km que separan Madrid de Barcelona. Teniendo en cuenta que no ha sucedido ningún percance que le obligase a acelerar o frenar bruscamente, justifica que ha habido al menos un momento en el que su velocidad instantánea fue de 200 km/h.

Llamemos f a la función que nos da la distancia en km en función del tiempo en horas. f es continua, ya que ni siquiera los trenes AVE de última tecnología son capaces de teletransportarse. Además es derivable, ya que se nos dice que no ha habido cambios bruscos de velocidad. Por tanto, podemos aplicar a f el teorema de Lagrange en el intervalo [0,3]:

$$\exists c \in (0,3): f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3} = \frac{600}{3} = 200$$

Es decir, en el instante en que habían pasado c horas desde la partida, la velocidad instantánea del tren era de 200 km/h q.e.d.