¿Qué es una solución? Eso depende por completo del cliente.

Michael Atiyah. (1929-). Matemático británico.

Matemáticas II. Examen de Álgebra. 14.11.2017.

1. (2 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{y} \end{vmatrix} = \mathbf{4}$**, calcula los siguientes determinantes indicando con claridad las propiedades que aplicas:**

a) $\begin{vmatrix} 2a-1 & 2b-2 & 2c-3 \\ x & 0 & y \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ x & 0 & y \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & 0 & y \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & 0 & y \end{vmatrix} = -8$

(1): A F_1 le hemos sumado F_3; el determinante no cambia;

(2): Hemos dividido F_1 por 2, con lo que el determinante se ha dividido también por 2;

(3): Hemos permutado F_2 y F_3, con lo cual el determinante ha cambiado de signo.

b) $\begin{vmatrix} a+x+1 & b+2 & c+y+3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ 2 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 5\begin{vmatrix} a+x+1 & b+2 & c+y+3 \\ 2 & 4 & 6 \\ x & 0 & y \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ x & 0 & y \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$

$= 5 \cdot 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & 0 & y \end{vmatrix} = 40$

(1): Hemos desarrollado por adjuntos por la cuarta columna.

(2): A F_1 le hemos restado $\frac{1}{2}F_2 + F_3$; el determinante no cambia;

(3): Hemos dividido F_2 por 2, con lo que el determinante se ha dividido también por 2;

2. (3 puntos) a) Despeja $\mathbf{X}$ en la ecuación matricial

$XA - B = 2X \Rightarrow X(A - 2I) = B \Rightarrow X = B(A - 2I)^{-1}$

b) Calcula el valor de $\mathbf{X}$ cuando $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix};\ |A - 2I| = -42;\ (A - 2I)^{-1} = \frac{-1}{42}\begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ 0 & -28 & -7 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \frac{-1}{42}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ 0 & -28 & -7 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{42}\begin{pmatrix} 0 & -28 & -7 \\ 0 & 42 & -21 \\ 0 & -154 & -28 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

3. (3 puntos) Discute el sistema según los valores del parámetro y resuélvelo, si es posible, para $\mathbf{m = 0}$:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 3 \\ mx + 5y - 4z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Si llamamos A a la matriz de coeficientes y $\overline{A}$ a la ampliada, $|A| = 3m - 15;\ |A| = 0 \Leftrightarrow m = 5$

Por lo tanto, si $m \neq 5 \Rightarrow$ rg(A)=3 y, como rg(A)$\leq$ $rg(\overline{A}) \leq 3 \Rightarrow rg(\overline{A}) = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Solución para $m = 0$ (Cramer):

$$x = -\frac{1}{15}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0; y = -\frac{1}{15}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{5}{3}; z = -\frac{1}{15}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{3}$$

Si $m = 5 \Rightarrow rg(\overline{A}) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -4 & -1 \end{array}\right) \overset{*}{=} rg\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 5 \\ -7 & -3 & 0 & -5 \end{array}\right) = 2 = rg(A) \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.

(*) $F_2: F_2 + 2F_1;\ F_3: F_3 - 4F_1$

4. (2 puntos) Nueve amigos han tomado cuatro cafés, tres aguas y dos tés por los que han pagado 10,80 euros. Al día siguiente, uno de los que tomó agua se pasó al café y faltó uno de los que tomaban té, con lo que la cuenta ascendió a 9,50 euros. Todos los precios son múltiplos de 10 céntimos. ¿Podemos saber con estos datos el precio de cada artículo? ¿Cuántas soluciones hay?

Llamando “c” al precio del café, “a” al del agua y “t” al del té, se tiene el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 4c + 3a + 2t = 10{,}8 \\ 5c + 2a + t = 9{,}5 \end{array}\right\} \xrightarrow{e_1:2e_2-e_1} \left.\begin{array}{r} 6c + a = 8{,}2 \\ 5c + 2a + t = 10{,}8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} c = c \\ a = 8{,}2 - 6c \\ t = 7c - 5{,}6 \end{array}\right\}$$

Como los precios han de ser todos positivos y múltiplos de 0,10:

$8{,}2 - 6c \geq 0 \Rightarrow c \leq 1{,}4;\ 7c - 5{,}6 \geq 0 \Rightarrow c \geq 0{,}8$;

Por tanto hay 7 soluciones posibles, una para cada valor de c múltiplo de 0,10 comprendido entre 0,8 y 1,4. No podemos saber el precio de cada producto.