Paciencia: todo es difícil antes de convertirse en fácil.

Saadi, poeta iraní (1184-1283)

Matemáticas II. Examen de Análisis (3). 20.04.2018

1. Sea la función

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{e^x - e^{-x}}}{\mathbf{x}} & \mathbf{si\ x} < 0 \\ \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x + \ln^2 x}} & \mathbf{si\ x} > 0 \end{cases}$$

a) ¿Qué tipo de discontinuidad presenta en $\mathbf{x = 0}$?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} (e^x + e^{-x}) = 2; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{0+\infty} = 0$$

Por tanto la discontinuidad es de salto finito

b) Estudia si tiene alguna asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2\ln x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+2\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

Por tanto por la derecha hay una asíntota de ecuación $y = 1$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{0-\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} (e^x + e^{-x}) = \infty;$$

Así pues, por la izquierda no hay asíntotas horizontales.

2. Demuestra razonadamente que la ecuación x^2 = x sen x + cos x tiene exactamente dos raíces en el intervalo [–π, π].

Sea $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y por tanto en [–π, π].

$f(-\pi) = \pi^2 - 0 + 1 > 0; \quad f(0) = -1 < 0; \quad f(\pi) = \pi^2 - 0 + 1 > 0 \xRightarrow{\text{Bolzano}} \exists a \epsilon (-\pi, 0)$

y $b \epsilon (0, \pi): f(a) = f(b) = 0$

Si hubiera una tercera raíz, c, como sería $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, podríamos aplicar el teorema de Rolle a dos intervalos distintos, con lo que la derivada se anularía al menos dos veces; pero $f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x - x\cos x + \operatorname{sen} x = x(2 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, lo cual sería una contradicción con que se anula al menos dos veces.

3. Halla $\mathbf{a, b, c} \in \mathbb{R}$ para que la función $\mathbf{f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c}$ tenga una inflexión en $(\mathbf{-1, 1})$ y un extremo relativo de abscisa 3. Determina si ese extremo relativo un máximo o un mínimo.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; \quad f''(x) = 6x + 2a;$

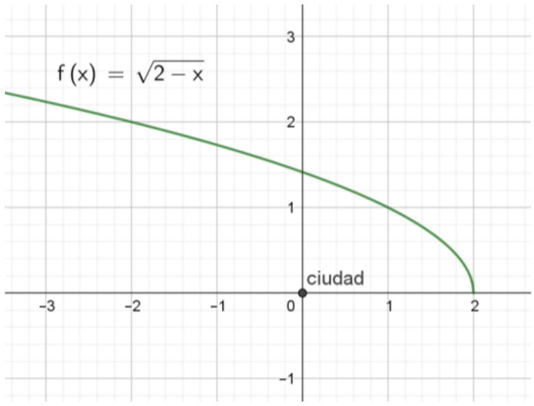
f tiene una inflexión en $x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 0 \Rightarrow 2a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3;$

f tiene un extremo relativo en $x = 3 \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \Rightarrow b = -6a - 27 = -45$

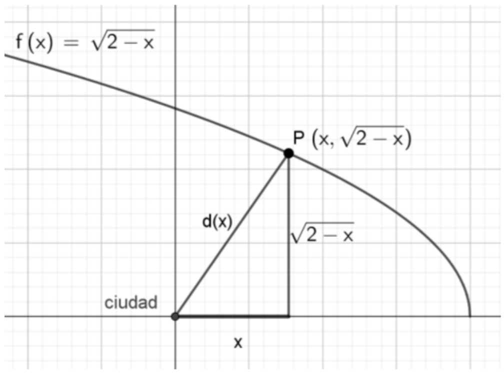
f pasa por el punto $(-1,1) \Rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow -1 + a - b + c = 1 \Rightarrow c = 2 - a + b = -46$

$f''(3) = 18 + 6 > 0 \Rightarrow$ el extremo es un mínimo

4. Encuentra las coordenadas del punto de la gráfica que se halla más cerca de la ciudad situada en el origen de coordenadas.



Queremos minimizar d(x); la calculamos por Pitágoras:



$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2-x}\right)^2} = \sqrt{x^2 - x + 2}$$

$$d'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Se trata claramente de un mínimo, ya que a su derecha d'(x) es >0 y a su izquierda <0 (el denominador es siempre >0). Por tanto el punto buscado tiene coordenadas

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

5. a) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio de Lagrange.

b) Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Demuestra que si la derivada de f es nula en $]a, b[$ (es decir, $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in]a, b[$), entonces f es constante en el intervalo $[a, b]$.

Supongamos que la función no fuera constante. Habría entonces al menos dos puntos $c, d \epsilon [a, b]$: $f(c) \neq f(d)$ y por tanto, $f(d) - f(c) \neq 0$. Aplicando el teorema de Lagrange al intervalo $[c, d]$, existiría un punto $e \in (c, d)$:

$$f'(e) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \Rightarrow f'(e) \neq 0$$

Pero esto contradice que $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in]a, b[$

Por tanto la función es constante en el intervalo $[a, b]$