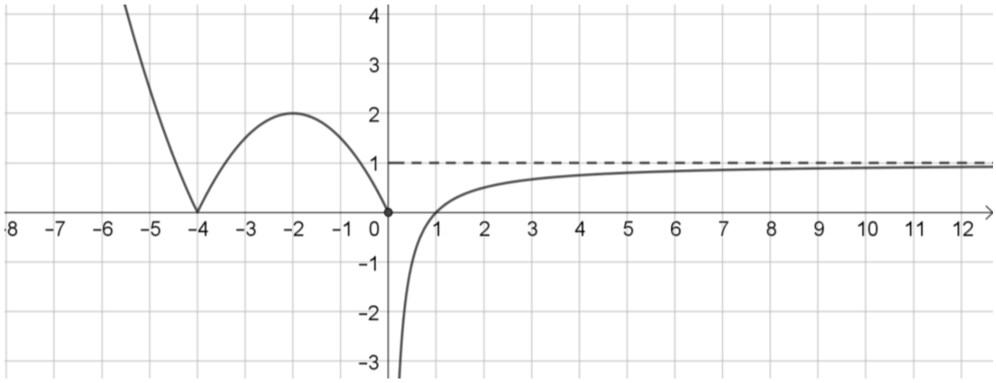
En más de tres siglos de ciencia todo ha cambiado excepto tal vez una cosa: el amor por lo simple.
Jorge Wagensberg Lubinski. Físico español (1948-03.03.2018)

Matemáticas 1. Examen de Análisis (3). 05.03.2018.

1. (2 puntos) A partir de la gráfica de la función f representada, contesta razonadamente a las cuestiones:



a) ¿Es f continua? No, es discontinua de salto infinito en $x = 0$

¿Y derivable? No; además de en $x = 0$, hay otro punto donde f no es derivable, $x = -4$

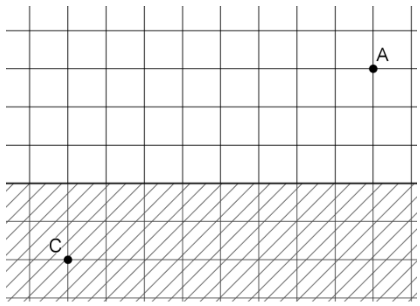
b) ¿Cuánto vale $\mathbf{lim_{x\to\infty}\ f'(x)}$? 0, ya que ésa es la pendiente de la asíntota a la que se aproxima.

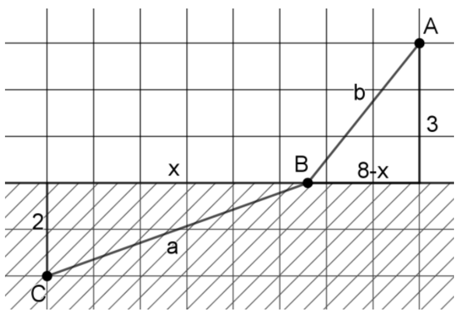
¿Y$\mathbf{lim_{x\to 0^+}\ f'(x)}$? $+\infty$, ya que la tangente se va “poniendo” vertical al acercarse al 0.

c) ¿Cuáles son las soluciones de la inecuación $\mathbf{f\,'(x) \geq 0}$? $]-4,-2]\cup]0,\infty]$, ya que es ahí donde f es creciente o tiene un extremo relativo.

d) ¿Y de $\mathbf{f\,''(x) \leq 0}$? $]-4,0[\ \cup\ ]0,\infty[$, ya que es ahí donde f es convexa.

2. (2 puntos) El esquema muestra desde arriba la posición de un cocodrilo (C) que se encuentra en el río (zona rayada) y un antílope (A) que está pastando. . El cocodrilo, que intenta llegar lo más rápidamente posible a donde se encuentra el antílope, avanza por agua a 3 m/s y por tierra a 2 m/s. Encuentra la función que expresa el tiempo que tarda e indica su dominio (las unidades de la cuadrícula representan 1 metro).





La trayectoria depende del punto que elija para salir del agua. Sea B dicho punto, t_a el tiempo que tarda en recorrer el trayecto a y t_b el tiempo que tarda en recorrer b; como t=e/v, usando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$a = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow t_a = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3};$$

$$b = \sqrt{9+(8-x)^2} \Rightarrow t_b = \frac{\sqrt{9+(8-x)^2}}{2}$$

Por tanto,

$$f(x) = t_a + t_b = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{\sqrt{9+(8-x)^2}}{2}, 0 \leq x \leq 8$$

3. (2 puntos) Estudia el crecimiento y la curvatura de $\mathbf{f(x) = arc\ tg\ (x^2)}$

f es simétrica par y continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^4+1}; \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(x^4+1)^2};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0; f''(0) > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } x = 0 \Rightarrow \text{crece en }]0, \infty[$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}; \text{ si } -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} < x < \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \underset{x^4<\frac{1}{3}}{\Longrightarrow} f''(x) > 0 \Rightarrow \text{convexa en } \left]-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right[$$

$$\text{si } x > \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \underset{x^4>\frac{1}{3}}{\Longrightarrow} f''(x) < 0 \Rightarrow \text{cóncava en } \left]\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \infty\right[\text{ y, por simetría, en } \left]-\infty, -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right[$$

4. (2 puntos) Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f(x) = \frac{\cos x}{x}}$

Es discontinua en $x = 0$, ya que $\nexists f(0)$ (división por 0);

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{0} = \pm\infty \Rightarrow \text{asíntota vertical y disc. de salto infinito en } x = 0$$

b) $\mathbf{f(x) = sen\ (tg\ x)}$

Tiene discontinuidades de segunda especie en $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$, ya que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \text{sen}(\pm\infty)$

c) $\mathbf{f(x) = arc\ tg\ \left(\frac{1}{x}\right)}$

Es discontinua en $x = 0$, ya que $\nexists f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \text{arc tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \text{arc tg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}; \Rightarrow \text{disc. de salto finito en } x = 0$$

5. (2 puntos) Estudia la simetría y la tendencia de la función del apartado a) del ejercicio anterior. Encuentra su función derivada.

$$\text{Simetría: } f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x} = -f(x) \Rightarrow \text{impar}$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal por los dos lados.}$$

$$f'(x) = \frac{(-\text{sen } x)\cdot x - \cos x}{x^2} = -\frac{x\,\text{sen } x + \cos x}{x^2}$$