**Examen de la segunda evaluación. 25.02.2016**

**1. Demuestra que la siguiente función alcanza un máximo absoluto en el intervalo** $\left[0,2\right]$ **y encuéntralo.**

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}4-e^{-(x-1)} si x\leq 1\\\frac{3x-3}{x^{2}-x} si x>1\end{matrix}\right.$$

f es continua, ya que
$$\lim\_{x→1^{-}}f\left(x\right)=\lim\_{x→1^{-}}\left(4-e^{1-x}\right)=3=f\left(1\right)$$

$$\lim\_{x→1^{+}}f\left(x\right)=\lim\_{x→1^{+}}\frac{3x-3}{x^{2}-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\_{x→1^{+}}\frac{3(x-1)}{x(x-1)}=3$$

Por el teorema de Weierstraß, la función alcanzará un máximo y un mínimo absoluto en el intervalo. El máximo puede alcanzarse en alcanzarse en alguno de los extremos del intervalo, en el punto anguloso (x=1) o donde se anule la derivada, pero esto último no ocurre, ya que

$$f'\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}e^{1-x} si x<1\\-\frac{3}{x^{2}} si x>1\end{matrix}\right.$$

Por tanto, el máximo sólo puede estar en x=0, en x=1 ó en x=2; calculamos el valor de f en cada uno de esos puntos para ver cuál es el mayor:

$$f\left(0\right)=4-e; f\left(1\right)=4; f\left(2\right)=\frac{3}{2}; ⇒el máximo es 4 y se alcanza en x=1$$

**2. Demuestra que las gráficas de f y g se cortan al menos una vez. ¿Pueden cortarse más de una vez?**

$$f\left(x\right)=x^{7}; g\left(x\right)=1-x;$$

f y g se cortan $⇔\left(f-g\right)\left(x\right)$ se anula.

Sea $h\left(x\right)=\left(f-g\right)\left(x\right)=x^{7}+x-1$. h es continua$∀x\in R$ , $h\left(0\right)<0, h\left(1\right)>1⇒$ por el teorema de Bolzano, f se anula entre 0 y 1.

Supongamos que f y g se cortaran dos ó más veces; $⇒∃α, β:h\left(α\right)=h\left(β\right)=0$ ; como h también es derivable, por el teorema de Rolle $∃c\in \left]α,β\right[:h^{'}\left(c\right)=0⇒7c^{6}+1=0$, lo cual es imposible, luego f y g sólo se cortan una vez.

**3. Obtén razonadamente la fórmula de una función racional cuya gráfica es la que aparece a continuación:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Como $y=-x$ es una asíntota oblicua, $$f\left(x\right)=-x+θ\left(x\right) con \lim\_{x→\infty }θ\left(x\right)=0$$Como $x=2 $ es una asíntota vertical, por ejemplo puede ser $$θ\left(x\right)=\frac{1}{x-2} $$Por tanto, $$f\left(x\right)=-x+\frac{1}{x-2}$$ |

**4. Obtén razonadamente la función derivada de la función de la gráfica:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | En A y en B la tangente es horizontal, luego f’=0. A la izquierda de A y a la derecha de B f decrece, luego f’<0, mientras que entre A y B f crece, luego f’>0; además, cuando x aumenta la pendiente de la curva se va poniendo cada vez más horizontal, por lo que f’ se aproxima a 0. |

**5. Halla los extremos relativos y las inflexiones de la función.**

$$f\left(x\right)=\frac{x^{2}}{e^{x}}; f^{'}\left(x\right)= \frac{2x-x^{2}}{e^{x}}; f^{''}\left(x\right)=\frac{2-4x+x^{2}}{e^{x}}; f^{'''}\left(x\right)=\frac{-x^{2}+6x-6}{e^{x}}$$

$$f^{'}\left(x\right)=0⇒2x-x^{2}=0⇒\left\{\begin{matrix}x=0;f^{''}\left(0\right)>0⇒mínimo en x=0;\\x=2;f^{''}\left(2\right)<0⇒máximo en x=2.\end{matrix}\right.$$

$$f^{''}\left(x\right)=0⇒2-4x+x^{2}=0⇒x=2\pm \sqrt{2}; f^{'''}\left(2\pm \sqrt{2}\right)\ne 0⇒inflexiones en x=2\pm \sqrt{2}$$