*Aunque no era en absoluto un hombre chapucero, tenía la habilidad especial de cometer muchos errores, la mayoría en la dirección acertada. He intentado en vano imitarlo, pero me parece dificilísimo cometer los errores correctos.*

G. Shimura (1930-) a propósito de Y. Taniyama (1927-1958). Matemáticos japoneses.

**Matemáticas II. Examen de Álgebra lineal. 29.10.2015**

***Nombre:***

1. a) Despeja la incógnita X en la ecuación matricial XA+B50=3X

b) Calcula el valor de X para $A=\left(\begin{matrix}3&0&1\\0&4&0\\4&0&2\end{matrix}\right) B=\left(\begin{matrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&0&0\end{matrix}\right)$

(2,5 puntos)

2. Sabiendo que $\left|\begin{matrix}a&b&c\\1&0&-1\\x&y&z\end{matrix}\right|=v,$ calcula

$$a) \left|\begin{matrix}2a&x+3&5a-1\\2b&y&5b\\2c&z-3&5c+1\end{matrix}\right| $$

$$b) \left|\begin{matrix}\begin{matrix}1 &1\\a &2a\end{matrix}&\begin{matrix}0&-1\\b&c\end{matrix}\\\begin{matrix}1& 2\\x&x+y\end{matrix}&\begin{matrix}0&-1\\y&z\end{matrix}\end{matrix}\right|$$

(2 puntos)

3. Discute el sistema según los valores de “a” y resuélvelo, si es posible, para $a=1 y a=-1$.

$$\left.\begin{matrix}2ax+y-z&=&0\\ x-y+z&=&a\\x+2y-(a+1)z&=&-a\end{matrix}\right\}$$

(3,5 puntos)

4. Un alumno de 2º de bachillerato ha comprado para su profesora de matemáticas un ramo de flores compuesto por un lirio, tres azucenas y siete ranúnculos que le ha costado 11,45€. Otro alumno se ha gastado 15,25€ en uno que lleva un lirio, cuatro azucenas y diez ranúnculos. ¿Podemos saber a partir de estos datos el precio de cada tipo de flor? ¿Y lo que costaría un ramo compuesto por un lirio, una azucena y un ranúnculo? ¿Puede un ranúnculo costar 1,5€?

(2 puntos)

***Nota****:* *Debe usarse, al menos una vez, el método de Cramer para resolver sistemas.*

**Examen resuelto.**

**1. a) Despeja la incógnita X en la ecuación matricial XA+B50=3X (1 punto)**$$⇒3X-XA=B^{50}⇒X\left(3I-A\right)=B^{50}⇒X=B^{50}\left(3I-A\right)^{-1}$$

**b) Calcula el valor de X para** $A=\left(\begin{matrix}3&0&1\\0&4&0\\4&0&2\end{matrix}\right) B=\left(\begin{matrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&0&0\end{matrix}\right)$

$$C=3I-A=\left(\begin{matrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}3&0&1\\0&4&0\\4&0&2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-4&0&1\end{matrix}\right); \left|C\right|=4; $$

$$C^{-1}=-\frac{1}{4} \left(\begin{matrix}1&0&1\\0&4&0\\4&0&0\end{matrix}\right) (0,5 p)$$

Por otro lado, $B^{2}=\left(\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{matrix}\right), B^{3}=B⇒B^{4}=B^{2}=B^{50}=\left(\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{matrix}\right)(0,5 p)$

Por tanto,

$$X=-\frac{1}{4}\left(\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}1&0&1\\0&4&0\\4&0&0\end{matrix}\right)=-\frac{1}{4}\left(\begin{matrix}-3&0&1\\8&4&0\\0&0&0\end{matrix}\right)(0,5 p)$$

**2. Sabiendo que** $\left|\begin{matrix}a&b&c\\1&0&-1\\x&y&z\end{matrix}\right|=v,$ **calcula (1 p. cada apartado)** $a) \left|\begin{matrix}2a&x+3&5a-1\\2b&y&5b\\2c&z-3&5c+1\end{matrix}\right| \begin{matrix}\\=\\2C\_{1},trasp.\end{matrix}2\left|\begin{matrix}a&b&c\\x+3&y&z-3\\5a-1&5b&5c+1\end{matrix}\right|\begin{matrix}\\=\\F\_{3}:F\_{3}-5F\_{1}\end{matrix} 2\left|\begin{matrix}a&b&c\\x+3&y&z-3\\-1&0&1\end{matrix}\right|=$

$$\begin{matrix}\\=\\F\_{2}:F\_{2}+3F\_{3}\end{matrix} 2\left|\begin{matrix}a&b&c\\x&y&z\\-1&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}\\=\\F\_{3}↔F\_{2}\end{matrix}-2\left|\begin{matrix}a&b&c\\1&0&-1\\x&y&z\end{matrix}\right|=-2\left|\begin{matrix}a&b&c\\-1&0&1\\x&y&z\end{matrix}\right|=2v$$

$$b) \left|\begin{matrix}\begin{matrix}1 &1\\a &2a\end{matrix}&\begin{matrix}0&-1\\b&c\end{matrix}\\\begin{matrix}1& 2\\x&x+y\end{matrix}&\begin{matrix}0&-1\\y&z\end{matrix}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\\=\\F\_{3}:F\_{3}-F\_{1}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\begin{matrix}1 &1\\a &2a\end{matrix}&\begin{matrix}0&-1\\ b&c\end{matrix}\\\begin{matrix}0& 1\\x&x+y\end{matrix}&\begin{matrix}0 &0\\y &z\end{matrix}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\\=\\(F\_{3}) \end{matrix}-\left|\begin{matrix}1&0&-1\\a&b&c\\x&y&z\end{matrix}\right|\begin{matrix}\\=\\F\_{1}↔F\_{2}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a&b&c\\1&0&-1\\x&y&z\end{matrix}\right|=v$$

**3. Discute el sistema según los valores de “a” y resuélvelo, si es posible, para a=1 y** $a=-1$**:**

$$\left.\begin{matrix}2ax+y-z&=&0\\ x-y+z&=&a\\x+2y-(a+1)z&=&-a\end{matrix}\right\}$$

$$\left|A\right|=\left|\begin{matrix}2a&1&-1\\1&-1&1\\1&2&-\left(a+1\right)\end{matrix}\right|\begin{matrix}\\=\\F\_{2}:F\_{2}-F\_{1}\end{matrix}\left|\begin{matrix}2a&1&-1\\1+2a&0&0\\1&2&-\left(a+1\right)\end{matrix}\right|=\left(1+2a\right)\left(a-1\right); $$

$$\left|A\right|=0⇔a=-\frac{1}{2}, a=1 (0,5 p)$$

$$a\ne -\frac{1}{2}, 1⇒rg A=3=rg \overline{A}⇒compatible determinado.(0,5 p)$$

En particular, si a=-1, se tendría (0,75 p):

$$\left.\begin{matrix}-2x+y-z&=&0\\ x-y+z&=&-1\\x+2y&=&1\end{matrix}\right\}⇒x=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}0&1&-1\\-1&-1&1\\1&2&0\end{matrix}\right|=1;y=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-2&0&-1\\1&-1&1\\1&1&0\end{matrix}\right|=0;z=-2$$

$$Si a=-\frac{1}{2}⇒rg \overline{A}=rg \left(\begin{matrix}0\\-1\\-1\end{matrix}\right)\begin{matrix}\\=\\F\_{2}:F\_{2}+2F\_{1}\end{matrix} rg \left(\begin{matrix}0\\-1\\-1\end{matrix}\right)=3;rg A=2$$

Por tanto, el sistema es incompatible (0,75 p.)

$$Si a=1⇒rg \overline{A}=rg \left(\begin{matrix}0\\1\\-1\end{matrix}\right)\begin{matrix}\\=\\F\_{2,3}:2F\_{2,3}-F\_{1}\end{matrix}rg \left(\begin{matrix}0\\2\\-2\end{matrix}\right)=2=rg A $$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad. Para resolverlo, en el sistema ya escalonado por Gauß eliminamos la segunda ecuación (equivalente a la tercera) y pasamos las z al otro miembro, con lo que se obtiene un sistema fácilmente resoluble por sustitución:

$$\left.\begin{matrix}2x+y&=&z\\3y&=&3z-2\end{matrix}\right\}⇒\left\{\begin{matrix}z=z\\y=\frac{3z-2}{3}\\x=\frac{z-y}{2}=\frac{z-\frac{3z-2}{3}}{2}=\frac{1}{3}\end{matrix} (1 p)\right.$$

**4. Un alumno de 2º de bachillerato ha comprado para su profesora de matemáticas un ramo de flores compuesto por un lirio, tres azucenas y siete ranúnculos que le ha costado 11,45€. Otro alumno se ha gastado 15,25€ en uno que lleva un lirio, cuatro azucenas y diez ranúnculos. ¿Podemos saber a partir de estos datos el precio de cada tipo de flor? ¿Y lo que costaría un ramo compuesto por un lirio, una azucena y un ranúnculo? ¿Puede un ranúnculo costar 1,5€?**

Llamando x al precio de un lirio, y al de la azucena y z al del ranúnculo, se tiene

$$\left.\begin{matrix}x+3y+7z=11,45\\x+4y+10z=15,25\end{matrix}\right\}⇒\left.\begin{matrix}x+3y+7z=11,45\\y+3z=3,80\end{matrix}\right\}⇒\left\{\begin{matrix}z=z\\y=3,80-3z\\x=0,05+2z\end{matrix}\right.$$

Por tanto, no se puede saber el precio de cada flor, ya que hay muchas soluciones válidas (Por ejemplo, haciendo z=1, z=1,2 z=0,8...). No es posible es que el ranúnculo (z) cueste 1,5, ya que eso significaría que la azucena (y) tendría un precio <0. Sí podemos calcular el precio del ramo compuesto por una flor de cada clase, ya que $x+y+z=0,05+2z+3,80-3z+z=3,85$