*La verdadera ciencia enseña, sobre todo, a dudar y a ser ignorante.*

Miguel de Unamuno (1864-1936).

**Matemáticas II. Examen de Geometría. 01.12.2015**

***Nombre:***

1. Halla el valor de k$\in R$ para el cual la intersección de los tres planos sea una recta y encuentra las ecuaciones paramétricas de esa recta.

$$\begin{matrix}π\_{1}≡x-2y+3z=1\\π\_{2}≡x+ky-z=1\\π\_{3}≡kx+2z=k\end{matrix}$$

**(2 puntos)**

2. Dada la recta $r≡\left\{\begin{matrix}x=0\\y=t\\z=2-3t\end{matrix}\right.$ y el punto $P(0,2,-1)$, hallar:

a) Ecuación del plano que contiene a r y a P.

b) Ecuación del plano perpendicular a r por P.

c) Proyección de P sobre r

d) Recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

**(4 puntos)**

3. Sean los puntos $P\left(1,2,0\right), Q\left(1,2,3\right) y R(1,0,0)$

a) Estudia si están o no alineados.

b) Encuentra el punto o puntos T de la recta r del ejercicio 2 de forma que el tetraedro PQRT tenga volumen 10.

**(2 puntos)**

4. a) Halla el valor de k para que el plano $π≡x+ky=3$ sea paralelo a la recta
$$r≡\frac{x-1}{2}=y=z$$

b) Para el valor hallado, encuentra la distancia entre $π$ y r.

**(2 puntos)**

$$Fórmulas: d\left(P,π\right)=\frac{\left|Aa+Bb+Cc+D\right|}{\sqrt{A^{2}+B^{2}+C^{2}}} d\left(P,r\right)=\frac{\left|\vec{PP\_{r}}×d\_{r}\right|}{\left|d\_{r}\right|} d\left(r,s\right)=\frac{\left|\left[d\_{r},d\_{s},\vec{P\_{s}P\_{r}} \right]\right|}{\left|d\_{s}×d\_{r}\right|}$$

**Examen resuelto**

**1. Halla el valor de k**$\in R$ **para el cual la intersección de los tres planos sea una recta y encuentra las ecuaciones paramétricas de esa recta.**

$$\begin{matrix}π\_{1}≡x-2y+3z=1\\π\_{2}≡x+ky-z=1\\π\_{3}≡kx+2z=k\end{matrix}$$

Para que los planos se corten en una recta ha de ser rg M=rg M\*=2$⇒\left|M\right|=0⇒$

$$⇒\left|\begin{matrix}1&-2&3\\1&k&-1\\k&0&2\end{matrix}\right|=0⇒-3k^{2}+4k+4=0⇒k=2, k=-\frac{2}{3}$$

Como debe ser rg M\*=2 vemos que, si k=2:

$$rg M^{\*}=rg \left(\begin{matrix}1\\1\\2\end{matrix}\right)=rg \left(\begin{matrix}1\\2\\2\end{matrix}\right)=2(F\_{2}=F\_{3})$$

$$k=-\frac{2}{3}⇒rg M^{\*}=rg \left(\begin{matrix}1\\1\\-\frac{2}{3}\end{matrix}\right)=rg \left(\begin{matrix}1\\2\\-\frac{2}{3}\end{matrix}\right)=2 (F\_{2}=-3F\_{3})$$

Por tanto, hay dos soluciones. Para hallar la recta intersección hay que resolver el sistema, para lo cual eliminamos una ecuación y pasamos a la derecha una de las incógnitas cuidando de que el determinante de los coeficientes sea $\ne $0.

Para k=2, eliminando la primera ecuación, simplificando la tercera y pasando la z, nos queda
$$\left\{\begin{matrix}x+2y=1+z\\x=1-z\end{matrix}\right.⇒\left\{\begin{matrix}x=1-t\\y=t\\z=t\end{matrix}\right.$$

Análogamente se hace para $k=-\frac{2}{3}$

**2. Dada la recta** $r≡\left\{\begin{matrix}x=0\\y=t\\z=2-3t\end{matrix}\right.$ **y el punto** $P(0,2,-1)$**, hallar:**

**a) Ecuación del plano que contiene a r y a P.**

Los vectores directores del plano son $d\_{r}=\left(0,1,-3\right) y \vec{P\_{r}P}=\left(0,2,-3\right) (Ya que P\_{r}=\left(0,0,2\right)).$ Tomando como punto P, la ecuación será:

$$\left|\begin{matrix}x&y-2&z+1\\0&1&-3\\0&2&-3\end{matrix}\right|=0⇒x=0$$

**b) Ecuación del plano perpendicular a r por P.**

Tendrá por vector normal a $d\_{r}=d\_{r}=\left(0,1,-3\right)$, luego su ecuación será $π:y-3z=D.$ Para que pase por P, ha de ser D=5

|  |  |
| --- | --- |
| **c) Proyección de P sobre r (Q)**Será la intersección de r y el plano $π$ anterior. Lo hallamos sustituyendo en la ecuación de $π$ las paramétricas de r:$$t-3\left(2-3t\right)=5⇒t=\frac{11}{10}⇒Q=\left(0, \frac{11}{10}, -\frac{9}{10}\right)$$ |  |

**d) Recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.**

Será la recta PQ:

$$\vec{QP}=\left(0, \frac{9}{10}, -\frac{1}{10}\right)∥\left(0, 9,-1\right)⇒\overbar{PQ}≡\frac{x}{0}=\frac{y-2}{9}=\frac{z+1}{-1}$$

**3. Sean los puntos** $P\left(1,2,0\right), Q\left(1,2,3\right) y R(1,0,0)$

**a) Estudia si están o no alineados.**

$\vec{PQ}=\left(0,0,3\right); \vec{PR}=\left(0,-2,0\right).$ Como no son proporcionales, los puntos no están alineados.

**b) Encuentra el punto o puntos T de la recta r del ejercicio 2 de forma que el tetraedro PQRT tenga volumen 10.**

Como T$\in R⇒T=(0, t,2-3t)⇒\vec{PT}=\left(-1,t-2,2-3t\right)$

$$10=\frac{1}{6}\left|\left[\vec{PQ},\vec{PR},\vec{PT} \right]\right|=\frac{1}{6}\left‖\begin{matrix}0&0&3\\0&-2&0\\-1&t-2&2-3t\end{matrix}\right‖⇒10=6⇒no hay solución$$

**4. a) Halla el valor de k para que el plano** $π≡x+ky=3$ **sea paralelo a la recta**$$r≡\frac{x-1}{2}=y=z$$

$$π∥r⇒\vec{n}\_{π}⊥\vec{d}\_{r}⇔\vec{n}\_{π}∙\vec{d}\_{r}=0⇔\left(1,k,0\right)∙\left(2,1,1\right)=0⇔2+k=0⇔k=-2$$

**b) Para el valor hallado, encuentra la distancia de r a** $π$ **.**

$$d\left(r,π\right)=d\left(P\_{r}, π\right)=d\left(\left(1,0,0\right), π\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$