*Si uno no puede errar de joven, nunca llegará a ser un humano completo y puro. El error es el punto de partida de la creación. Si tenemos miedo a equivocarnos, jamás podremos asumir los grandes retos.*

(George Steiner. Ensayista europeo nacido en 1929)

**Matemáticas II. Examen de Álgebra. 02.11.2016**

**1. a)** **(1 punto) Despeja la matriz X de la ecuación**$ XA+B=3X$

$$XA+B=3X⇒B=3X-XA=X\left(3I-A\right)⇒X=B(3I-A)^{-1}$$

 **b) (1 punto) Calcula** $A^{-1}$ **y** $B^{100}$ **siendo** $A=\left(\begin{matrix}0&0&2\\0&-1&0\\3&0&-2\end{matrix}\right)$ **y** $B=\left(\begin{matrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&0&0\end{matrix}\right)$

$$A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}Adj \left(A^{T}\right)=\frac{1}{6}\left(\begin{matrix}2&0&2\\0&-6&0\\3&0&0\end{matrix}\right)$$

$$B^{2}=B∙B=\left(\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{matrix}\right); B^{3}=B^{2}∙B=\left(\begin{matrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&0&0\end{matrix}\right)=B⇒B^{4}=B^{3}∙B=B∙B=B^{2};$$

Así, cada potencia va valiendo $B$ ó $B^{2}$ según el exponente sea impar o par.

Por tanto, $B^{100}=B^{2}=\left(\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{matrix}\right)$

**2. a) (0,5 puntos) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.**

Dado un sistema de ecuaciones lineales, si llamamos A a la matriz de coeficientes y $\overbar{A}$ a la matriz ampliada (añadiendo a A la columna de los términos independientes), se cumple que el sistema es compatible si y sólo si $rg A=rg \overbar{A}$.

Además, en caso de compatibilidad, el número de grados de libertad del sistema es igual a la diferencia entre el número de incógnitas y el rango común.

**b) (2,5 puntos) Discute el sistema** $\left.\begin{matrix}kx+y+z=k-3\\x+ky+z=k-3\\x+y+z=k\end{matrix}\right\}$ **según los valores de** $k\in R$

$$\left|A\right|=k^{2}-2k+1=0⇔k=1$$

Si $k\ne 1⇒\left|A\right|\ne 0⇒rg A=3⇒rg \overbar{A}=3⇒$sistema compatible determinado

Si $k=1⇒\left.\begin{matrix}x+y+z=-2\\x+y+z=-2\\x+y+z=1\end{matrix}\right\}⇔ \left.\begin{matrix}x+y+z=-2\\x+y+z=1\end{matrix}\right\}$ claramente incompatible, pues $1\ne -2$

**c) (1 punto) Resuelve el sistema anterior cuando** $k=3$**.**

Por Cramer:
$$\left|A\right|=4⇒x=\frac{1}{4}\left|\begin{matrix}0&1&1\\0&3&1\\3&1&1\end{matrix}\right|=-\frac{3}{2} ;y=\frac{1}{4}\left|\begin{matrix}3&0&1\\1&0&1\\1&3&1\end{matrix}\right|=-\frac{3}{2};z=\frac{1}{4}\left|\begin{matrix}3&1&0\\1&3&0\\1&1&3\end{matrix}\right|=8$$

**3. (1 punto) Sabiendo que**$\left|\begin{matrix}x&-3&1\\y&0&1\\z&7&1\end{matrix}\right|=6$**, calcula** $\left|\begin{matrix}\begin{matrix}3x-6&-3\\3y&0\end{matrix}&\begin{matrix}1 &2\\1 &2\end{matrix}\\\begin{matrix}3z+14&7\\0&5\end{matrix}&\begin{matrix}1&2\\0&-2\end{matrix}\end{matrix}\right|$ **indicando las propiedades utilizadas.**

$$\left|\begin{matrix}\begin{matrix}3x-6&-3\\3y&0\end{matrix}&\begin{matrix}1 &2\\1 &2\end{matrix}\\\begin{matrix}3z+14&7\\0&5\end{matrix}&\begin{matrix}1&2\\0&-2\end{matrix}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\left(1\right)\\=\\\end{matrix}5\left|\begin{matrix}3x-6&1&2\\3y&1&2\\3z+14&1&2\end{matrix}\right|-2\left|\begin{matrix}3x-6&-3&1\\3y&0&1\\3z+14&7&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}\left(2\right)\\=\\\end{matrix}$$

$$=5∙0-2\left|\begin{matrix}3x-6&-3&1\\3y&0&1\\3z+14&7&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}\left(3\right)\\=\\\end{matrix}-2\left|\begin{matrix}3x&-3&1\\3y&0&1\\3z&7&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}\left(4\right)\\=\\\end{matrix}-2∙3\left|\begin{matrix}x&-3&1\\y&0&1\\z&7&1\end{matrix}\right|=-36$$

(1): Desarrollo por adjuntos de la fila 4

(2): Si dos columnas son proporcionales (2ª y 3ª) el determinante es nulo

(3): Si a una columna se le suma una combinación lineal de otras el determinante no varía (hemos sumado a la primera -2 por la segunda)

(4): Si multiplicamos una columna por un valor (1/3 en este caso), el determinante queda multiplicado por ese valor; para mantener la igualdad hay que multiplicar también por el inverso (3 en este caso)

**4. (2 Puntos) El sueldo anual de Ana es la media aritmética de los sueldos de sus amigas Belén y Clara; el de Belén es de 3000 euros menos que la media de los de sus amigas, y el de Clara, 3000 euros más que la media de los de sus amigas. a) ¿Podemos calcular con estos datos el sueldo de cada una? Justifica. b) ¿Qué relación hay entre el sueldo de Ana y el de Belén?**

Si llamamos a, b y c a los respectivos sueldos, en miles de euros, tenemos:

$$\left.\begin{matrix}a=\frac{b+c}{2}\\b=\frac{a+c}{2}-3\\c=\frac{a+b}{2}+3\end{matrix}\right\}⇔\left.\begin{matrix}2a-b-c=0\\a-2b+c=6\\a+b-2c=-6\end{matrix}\right\}; rg\overbar{A}=rg\left(\begin{matrix}0\\6\\-6\end{matrix}\right)\begin{matrix}\\=\\\begin{matrix}F\_{2}:F\_{2}+F\_{1}\\F\_{3}:F\_{3}-2F\_{1}\end{matrix}\end{matrix}$$

$=rg\left(\begin{matrix}0\\6\\-6\end{matrix}\right)\begin{matrix}\\=\\\end{matrix}rg\left(\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right)=2=rg A⇒$ sistema indeterminado.

Por tanto no podemos hallar el valor de las incógnitas, pero como $a-b=2$ sí podemos decir que Ana gana 2000 euros más que Belén.

**5. (1 punto) Dado el sistema** $\left.\begin{matrix}x-y+2z=3\\x+y+z=5\end{matrix}\right\}$**, añade justificadamente otra ecuación de forma que el sistema resultante sea:**

**a) Incompatible**

Cualquier ecuación de la forma $α\left(x-y+2z\right)+β\left(x+y+z\right)=γ$, $α,β,γ\in R,$ $γ\ne 3α+5β$, ya que así se mantiene $rg A=2$ pero $rg \overbar{A}=3$

**b) Indeterminado.**

Cualquier ecuación de la forma $α\left(x-y+2z\right)+β\left(x+y+z\right)=3α+5β$ con $α,β,γ\in R$, ya que así se mantiene $rg A=2$ $=rg \overbar{A}$