*Oh, mi marido lo hace en el revés de un sobre.*

Elsa Einstein, al oír que se necesitaba un telescopio para determinar la forma del espacio-tiempo.

**Matemáticas I. Examen de geometría. 24.02.2016**

***Nombre:***

1. Consideremos el punto $P(1,-3)$ y la recta $r≡x-2y=5$.

a) Obtén la pendiente de r y las ecuaciones general y paramétrica de una recta s que pasa por P y es paralela a r.

b) Calcula (alguna razón trigonométrica de) el ángulo que forma r con la bisectriz del primer cuadrante.

c) Halla la ecuación de una circunferencia centrada en $P$ y tangente a r.

**(1+1+1 punto)**

2. La figura muestra una cónica con las coordenadas de uno de sus focos y la longitud de uno de sus semiejes:

****

Se pide:

a) Explica de qué cónica se trata y cómo se obtiene.

b) Halla las ecuaciones de sus ejes de simetría.

c) Halla las coordenadas del otro foco.

d) Halla su semidistancia focal y la longitud de su semieje mayor.

e) Halla las coordenadas de alguno de sus vértices (A, A’, B ó B’).

f) Expresa analíticamente la propiedad geométrica que verifican los puntos de la cónica.

**(a:0,5; b:1,5; c:1; d:1,5; e:1,5; f:1 punto)**

***Fórmulas:***

$$d=\frac{\left|Aa+Bb+C\right|}{\sqrt{A^{2}+B^{2}}}; tg α=\left|\frac{m\_{1}-m\_{2}}{1+m\_{1}∙m\_{2}}\right|$$

|  |  |
| --- | --- |
| Estándares de aprendizaje evaluables | Ejercicios |
| Bloque 1: |
| 1.1. Expresa de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, con rigor y precisión  | Todos |
| 2.1. Comprende el enunciado de un problema, lo formaliza matemáticamente y lo relaciona con el número de soluciones.  | Todos |
| 4.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados.  | Todos |
| 4.2. Utiliza de forma coherente argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos.  | Todos |
| Bloque 2: |
| 1.1 Reconoce los distintos tipos de números y opera y resuelve problemas con ellos. | Todos |
| Bloque 4: |
| 3.1 Emplea las consecuencias de la definición de producto escalar para normalizar vectores, estudiar la ortogonalidad de dos vectores o la proyección de un vector sobre otro.  | 1b, 2b |
| 3.2 Calcula la expresión analítica del producto escalar, del módulo de un vector y del coseno del ángulo que forman dos vectores.  | 1b, 2d, 2e |
| 4.1. Calcula distancias entre puntos, de un punto a una recta y entre dos rectas.  | 1c, 2d, 2e, 2f |
| 4.2. Obtiene la ecuación de una recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos.  | 1a, 1b, 2b, 2e |
| 5.1. Conoce el significado de lugar geométrico en el plano e identifica las cónicas como lugares geométricos y conoce sus principales características.  | 2a, 2b, 2c, 2d, 2e, 2f |

**Examen resuelto**

**1. Consideremos el punto** $P(1,-3)$ **y la recta** $r≡x-2y=5$**.**

**a) Obtén la pendiente de r y las ecuaciones general y paramétrica de una recta s que pasa por P y es paralela a r.**

Para obtener la pendiente (m) despejamos:

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}⇒m=\frac{1}{2}$$

Ecuación general: $s≡x-2y=C;P\in s⇒1-2\left(-3\right)=7⇒s≡x-2y=7$

Paramétricas: Un vector director de r (y por tanto de s) es $d\_{r}=(2,1)⇒s≡\left\{\begin{matrix}x=1+2t\\y=-3+t\end{matrix}\right.$

**b) Calcula (alguna razón trigonométrica de) el ángulo que forma r con la bisectriz del primer cuadrante.**

Podemos hallar el coseno o la tangente. El vector director de la bisectriz es u=(1, 1) y su pendiente, m’=1.

$$u∙d\_{r}=\left|u\right|∙\left|d\_{r}\right|∙\cos(α)⇒\cos(α)=\frac{u∙d\_{r}}{\left|u\right|∙\left|d\_{r}\right|}=\frac{\left(1,1\right)∙(2,1)}{\left|(1,1)\right|∙\left|(2,1)\right|}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$tg α=\left|\frac{m-m'}{1+m∙m'}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{1+\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{3}$$

**c) Halla la ecuación de una circunferencia centrada en** $P$ **y tangente a r.**

El radio de la circunferencia (c) buscada será la distancia del centro a la recta tangente, es decir

$$r=d\left(P,r\right)=\left|\frac{1-2\left(-3\right)-5}{\sqrt{1+2^{2}}}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}}⇒c≡\left(x-1\right)^{2}+\left(y+3\right)^{2}=\frac{4}{5}$$

**2. La figura muestra una cónica con las coordenadas de uno de sus focos y la longitud de uno de sus semiejes:**

****

**Se pide:**

**a) Explica de qué cónica se trata y cómo se obtiene.**

Se trata de una elipse, obtenida cortando una superficie cónica con una recta de pendiente menor a la de la directriz del cono.

**b) Halla las ecuaciones de sus ejes de simetría.**

El eje mayor (r) es la recta que pasa por F y C y por tanto tendrá por vector director $\vec{CF}=(3,1)$, luego su ecuación será $x-3y=-4$

El menor (s) es perpendicular al anterior y pasa por C, luego su ecuación será $3x+y=-2$

**c) Halla las coordenadas del otro foco.**

Si $F^{'}=\left(a,b\right), como \vec{F'C}=\vec{CF}⇒\left(-1-a, 1-b\right)=\left(3,1\right)⇒a=-4, b=0$

**d) Halla su semidistancia focal y la longitud de su semieje mayor.**

Semidistancia focal: $c=d\left(C,F\right)=\left|\vec{CF}\right|=\sqrt{10}$

Semieje mayor: $a^{2}=b^{2}+c^{2}=6+10⇒a=4$

e) Halla las coordenadas de alguno de sus vértices (A, A’, B ó B’).

Para B y para B’: sabemos que están en el semieje menor y que distan $\sqrt{6}$ de C.

Semieje menor en paramétricas: $\left(x,y\right)=\left(-1,1\right)+t\left(1,-3\right)⇒B=\left(t-1,1-3t\right);$

$$d\left(B, C\right)=\sqrt{6}⇒\sqrt{t^{2}+\left(-3t\right)^{2}}=\sqrt{6}⇒10t^{2}=6⇒t=\pm \sqrt{\frac{3}{5}}⇒$$

$$⇒B, B'=\left(\pm \sqrt{\frac{3}{5}}-1,1\mp 3\sqrt{\frac{3}{5}}\right) $$

A y A’ se calculan análogamente, cambiando la recta en la que se encuentran y la distancia a C.

**f) Expresa analíticamente la propiedad geométrica que verifican los puntos de la cónica.**

Si un punto $P=\left(x, y\right)\in $elipse$ ⇒d\left(P,F\right)+d\left(P, F^{'}\right)=2a⇒$

$$⇒\sqrt{\left(x-2\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}}+\sqrt{\left(x+4\right)^{2}+y^{2}}=8$$