*El conocimiento, como la ciencia, requiere cultivar una mente abierta y un espíritu crítico. No se puede pensar con claridad sin aprender a inclinar a cabeza en el ángulo adecuado para entender los argumentos contrarios. Sin resultados negativos no hay progreso.*

Javier Sampedro. Científico y periodista español nacido en 1960

**Matemáticas II. Examen de geometría. 07.12.2016**

**1. Estudia la posición relativa de los planos según los valores de** $a\in R$

$$\begin{matrix}π\_{1}≡2x-y+z=0\\π\_{2}≡ax+y-z=6\\π\_{3}≡3x+y-z=2\end{matrix}$$

Si llamamos M a la matriz de coeficientes y $\overbar{M}$ a la ampliada, como la segunda y tercera columnas son proporcionales, $\left|M\right|=0⇒$ los planos nunca estarán en posición general. Además, rg(M)=2, pues $\left|\begin{matrix}2&-1\\3&1\end{matrix}\right|\ne 0⇒π\_{1} $y $π\_{3} $son secantes.

Por otro lado, $\left|\begin{matrix}2&-1&0\\a&1&6\\3&1&2\end{matrix}\right|=2a-26$ luego si $a=13⇒rg(\overbar{M})=2⇒$los planos estarán en haz (una recta común a los tres).

Si $a\ne 13⇒rg\left(\overbar{M}\right)=3⇒$ no hay puntos comunes a los tres planos, luego estarán en “tienda de campaña” (si $a\ne -2, a\ne 3$) o serán dos paralelos ($π\_{1}∥π\_{2}$ si $a=-2, π\_{3}∥π\_{2}$ si $a=3$) y el otro secante.

**2. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos** $π\_{1}≡x+3y-z=0$ **y** $π\_{2}≡3x+y-z=9$ **.**

Sea $P=\left(x,y,z\right) $un punto de ese lugar geométrico.

$$d\left(P, π\_{1}\right)=d\left(P, π\_{2}\right)⇒\frac{\left|x+3y-z\right|}{\sqrt{11}}=\frac{\left|3x+y-z-9\right|}{\sqrt{11}}⇒\left|x+3y-z\right|=\left|3x+y-z-9\right|⇒$$

$$⇒x+3y-z=\pm \left(3x+y-z-9\right)⇒\left\{\begin{matrix}x+3y-z=3x+y-z-9⇒2x-2y=9\\x+3y-z=-3x-y+z+9⇒4x+4y-2z=9\end{matrix}\right.$$

**¿Qué forman estos puntos?**

Son las ecuaciones de dos planos perpendiculares entre sí (planos bisectores de $π\_{1}$ y $π\_{2}$)

**3. Dados** $r≡ \left.\begin{matrix}x+y=0\\z=5\end{matrix}\right\}$ **y** $π≡x+my+2z=1, $ **halla** $m\in R$ **para que**

**a) Sean paralelos**

Un vector director de la recta r, $d\_{r}$, es $\left(1,1,0\right)×\left(0,0,1\right)=\left(-1,1,0\right).$ Un vector normal al plano $π, n\_{π}$, es $\left(1,m,2\right)$

$$r∥π⇔d\_{r}⊥n\_{π}⇔d\_{r}∙n\_{π}=0⇔\left(-1,1,0\right)∙\left(1,m,2\right)=0⇔m-1=0⇔m=1$$

**b) Formen un ángulo de 45**$°$

$$d\_{r}∙n\_{π}=\left|d\_{r}\right|∙\left|n\_{π}\right|∙\cos(45°)⇒m-1=\sqrt{2}∙\sqrt{5+m^{2}}∙\frac{\sqrt{2}}{2}⇒m-1=\sqrt{5+m^{2}}⇒$$

$$⇒5+m^{2}=1+m^{2}-2m⇒m=-2$$

**4. Encuentra un punto P**$\in $**r**$≡\left(1,2,1\right)+λ(0,-1,0)$ **que forma con A(0, 0, 1) y B(-1, 0, 0) un triángulo de 2 unidades cuadradas de superficie. ¿Cuántos existen?**

$$P=\left(1, 2-λ, 1\right); \vec{BA}=\left(1,0,1\right); \vec{AP}=\left(1, 2-λ, 0\right); \vec{BA}×\vec{AP}=(λ-2, 1,2-λ)$$

$$2=\frac{1}{2}\left|\vec{BA}×\vec{AP}\right|⇒4=\sqrt{\left(λ-2\right)^{2}+1+\left(2-λ\right)^{2}}⇒16=2λ^{2}-8λ+1⇒$$

$$⇒λ=\frac{8\pm \sqrt{64+120}}{4}=4\pm \frac{\sqrt{46}}{2}$$

Como hay dos soluciones para $λ ,$ hay dos puntos que verifican la condición pedida:

$$P\_{1}=\left(1, 2-\frac{\sqrt{46}}{2}, 1\right), P\_{2}=\left(1, 2+\frac{\sqrt{46}}{2}, 1\right)$$

**5. Dadas dos rectas** $r\_{1}$ **y** $r\_{2}$ **en posición general (se cruzan) y un punto P exterior a ambas, explica cómo encontrar otra recta s que corte a**$ r\_{1}$ **y a** $r\_{2}$ **y contenga a P.**

s es coplanaria con $r\_{1}$ por ser secantes. El plano que contiene a $r\_{1}$ y a P tiene por vectores directores el de $r\_{1}$ y otro que una un punto cualquiera de $r\_{1}$ con P, por lo que podemos hallar su ecuación. Análogamente hallamos el plano que contiene a $r\_{2}$ y a P. La recta s, al estar en ambos, es la intersección de los dos planos hallados.

Otra forma de hallar s: si llamamos $P\_{1}$ y $P\_{2}$ a los dos cortes respectivos de s con $r\_{1}$ y $r\_{2}$, podemos expresar cada uno en función de un parámetro (utilizando las ecuaciones paramétricas de cada una de las rectas). Como P, $P\_{1}$ y $P\_{2}$ están alineados, los vectores $\vec{PP\_{1}}$ y $\vec{PP\_{2}}$ son proporcionales, por lo que los tres cocientes de sus coordenadas respectivas son iguales. Esto nos da dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo el sistema se obtienen $P\_{1}$ y $P\_{2}$ y con ellos s.